UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NÚMEROS CURIOSOS

DANIELLA ZATARIAN

FLORIANÓPOLIS
2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NÚMEROS CURIOSOS

DANIELLA ZATARIAN

FLORIANÓPOLIS
2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NÚMEROS CURIOSOS

DANIELLA ZATARIAN

Trabalho de conclusão de curso orientado por
Lício Hernanes Bezerra

FLORIANÓPOLIS
2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NÚMEROS CURIOSOS

DANIELLA ZATARIAN

Trabalho de conclusão de curso orientado por
Lício Hernanes Bezerra

FLORIANÓPOLIS
2003

200911

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 34/SCG/03.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Lício Hernanes Bezerra
Orientador

Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Prof. José Luiz Rosas Pinho

200911

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 34/SCG/03.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Lício Hernanes Bezerra
Orientador

Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Ao meu futuro marido, Alexandre Felix,
pelo apoio e incentivo e por todos os
minutos ao seu lado.

Ao meu futuro marido, Alexandre Felix,
pelo apoio e incentivo e por todos os
minutos ao seu lado.

Agradecimentos

Agradeço à todas as pessoas que durante o período de elaboração deste trabalho me incentivaram e me ajudaram a atravessar todos os obstáculos encontrados.

Agradecimentos

Agradeço à todas as pessoas que durante o período de elaboração deste trabalho me incentivaram e me ajudaram a atravessar todos os obstáculos encontrados.

Sumário

Sumário

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo histórico da razão áurea e constatamos a sua ocorrência em várias figuras geométricas (espiral logarítmica, pentagrama, etc.) e na natureza. Verificamos a relação do numero áureo com a seqüência de Fibonacci e deduzimos alguns resultados interessantes dessa relação. Introduzimos, ainda, os números perfeitos e a sua correspondência com os primos de Mersenne, via fórmula de Euclides, e concluímos o trabalho com os números amigáveis.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo histórico da razão áurea e constatamos a sua ocorrência em várias figuras geométricas (espiral logarítmica, pentagrama, etc.) e na natureza. Verificamos a relação do numero áureo com a seqüência de Fibonacci e deduzimos alguns resultados interessantes dessa relação. Introduzimos, ainda, os números perfeitos e a sua correspondência com os primos de Mersenne, via fórmula de Euclides, e concluímos o trabalho com os números amigáveis.

"Podemos, em especial nas ciências matemáticas, observar a ordem, a simetria e a restrição; e estas são as formas superiores do belo."

Aristóteles

"Podemos, em especial nas ciências matemáticas, observar a ordem, a simetria e a restrição; e estas são as formas superiores do belo."

Aristóteles

Introdução

Neste trabalho procuro buscar a beleza matemática e, ao mesmo tempo, desvendar tópicos curiosos que atraem a atenção até mesmo do leitor leigo.

A magia do número áureo me chamou a atenção já antes de começar a graduação, quando lia artigos sobre a arte grega, e, após começar os estudos, percebi que tudo no mundo tem uma relação com a matemática.

No capítulo 1, o estudo está direcionado para esse número, examinando figuras simples que escondem curiosas relações. Entre elas estão o retângulo áureo e a espiral logarítmica. Neste capítulo, mostro que os números de Fibonacci, com demonstrações e interessantes aplicações, estão intimamente relacionados com a razão áurea, podendo ser encontrados em qualquer lugar, seja nas plantas ou em conchas do mar.

No capítulo 2, restrinjo o estudo a três números fascinantes: os perfeitos, os amigáveis e os primos de Mersenne. Tais números possuem propriedades especiais e trazem aos curiosos uma divertida matemática. Estes também são encontrados no mundo, seja no período lunar ou em passagens bíblicas.

Enfim, busco com este trabalho atrair os leitores, matemáticos ou não, que tenham como principal característica a apreciação da beleza diferente, curiosa e matemática.

Introdução

Neste trabalho procuro buscar a beleza matemática e, ao mesmo tempo, desvendar tópicos curiosos que atraem a atenção até mesmo do leitor leigo.

A magia do número áureo me chamou a atenção já antes de começar a graduação, quando lia artigos sobre a arte grega, e, após começar os estudos, percebi que tudo no mundo tem uma relação com a matemática.

No capítulo 1, o estudo está direcionado para esse número, examinando figuras simples que escondem curiosas relações. Entre elas estão o retângulo áureo e a espiral logarítmica. Neste capítulo, mostro que os números de Fibonacci, com demonstrações e interessantes aplicações, estão intimamente relacionados com a razão áurea, podendo ser encontrados em qualquer lugar, seja nas plantas ou em conchas do mar.

No capítulo 2, restrinjo o estudo a três números fascinantes: os perfeitos, os amigáveis e os primos de Mersenne. Tais números possuem propriedades especiais e trazem aos curiosos uma divertida matemática. Estes também são encontrados no mundo, seja no período lunar ou em passagens bíblicas.

Enfim, busco com este trabalho atrair os leitores, matemáticos ou não, que tenham como principal característica a apreciação da beleza diferente, curiosa e matemática.

Capítulo 1

A proporção áurea e o número de Fibonacci

1.1 A proporção áurea

1.1.1 Um breve relato histórico

O mundo grego sempre foi rodeado de misticismos, sabedorias e, principalmente, belezas. Prova disso está no uso da proporção áurea em suas mais variadas obras, como, por exemplo, uma das obras arquitetônicas gregas mais admiradas da antiguidade, o templo de Parthenon (figura 1), construído pelo arquiteto e escultor Phideas (séc. V a.C.), que organizou toda a fachada do templo de acordo com a proporção áurea.

Se tomarmos o lado maior do retângulo que circunscreve a fachada do Parthenon e dividirmos pelo seu lado menor, o resultado será aproximadamente 1,618, que é chamado de "número áureo".

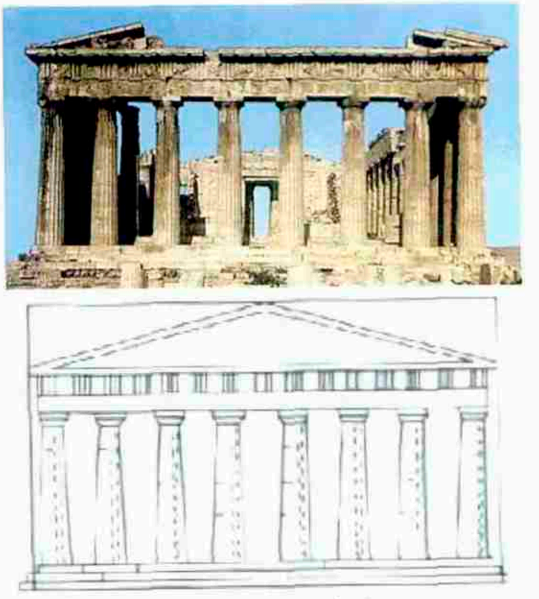

Figura 1 – Parthenon de Atenas
(www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm)

A harmonia nessa proporção também se encontra na composição da obra mais famosa de Leonardo da Vinci: a Mona Lisa (figura 2). Se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que se encaixa na proporção áurea, e, subdividindo esse retângulo na linha horizontal dos olhos, encontraremos também a proporção áurea.

Capítulo 1

A proporção áurea e o número de Fibonacci

1.1 A proporção áurea

1.1.1 Um breve relato histórico

O mundo grego sempre foi rodeado de misticismos, sabedorias e, principalmente, belezas. Prova disso está no uso da proporção áurea em suas mais variadas obras, como, por exemplo, uma das obras arquitetônicas gregas mais admiradas da antiguidade, o templo de Parthenon (figura 1), construído pelo arquiteto e escultor Phideas (séc. V a.C.), que organizou toda a fachada do templo de acordo com a proporção áurea.

Se tomarmos o lado maior do retângulo que circunscreve a fachada do Parthenon e dividirmos pelo seu lado menor, o resultado será aproximadamente 1,618, que é chamado de "número áureo".

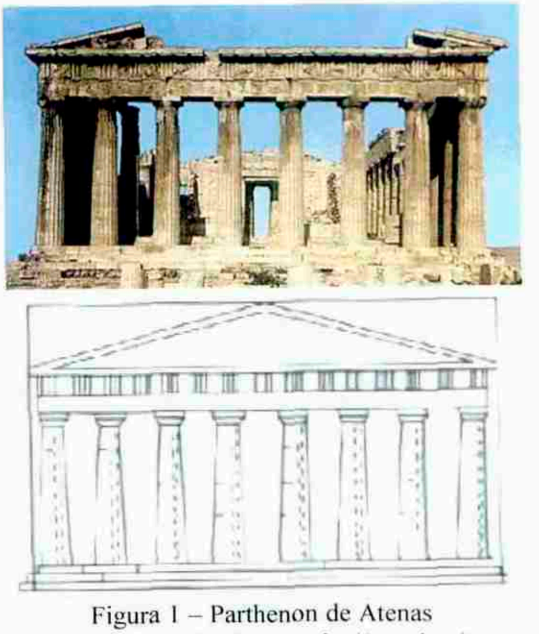

Figura 1 – Parthenon de Atenas
(www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm)

A harmonia nessa proporção também se encontra na composição da obra mais famosa de Leonardo da Vinci: a Mona Lisa (figura 2). Se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que se encaixa na proporção áurea, e, subdividindo esse retângulo na linha horizontal dos olhos, encontraremos também a proporção áurea.

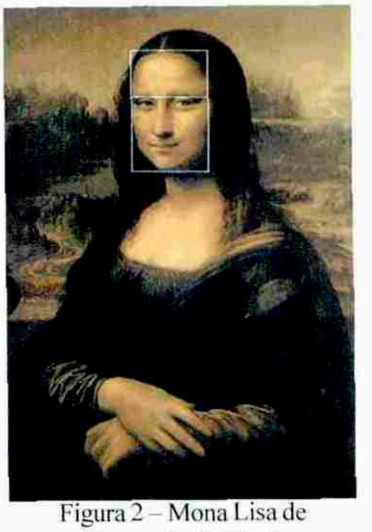

Figura 2 – Mona Lisa de Leonardo da Vinci (www.educ.fc.ul.pt)

Leonardo da Vinci também ilustrou um tratado escrito por Luca Pacioli, em 1509, em que chamou a proporção áurea de "Divina Proporção". Inúmeras são as utilidades e curiosidades que envolvem o princípio dessa proporção.

Os pitagóricos encontraram o número 1,618034... para a razão áurea. A letra grega ϕ (Phi) foi utilizada para denotar essa razão em homenagem a Phideas, escultor grego que teria usado muito essa proporção em suas obras.

Em 1753, o matemático escocês Robert Simson estabeleceu pela primeira vez a relação entre a seqüência de Fibonacci e a proporção áurea, quando provou que a razão entre dois termos consecutivos da seqüência tende ao número áureo.

Meu objetivo é apresentar, neste capítulo, um estudo do número áureo e algumas curiosidades relacionadas a ele.

1.1.2 O número ϕ (Phi)

Seja AB um segmento de reta. Supor C um ponto que está entre os pontos A e B (figura 3).

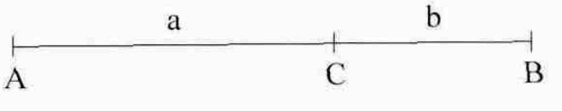

Figura 3

Assim, temos dois segmentos: AC = a e CB = b. Dizemos que $\frac{a}{b}$ está na razão áurea se $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Leonardo da Vinci também ilustrou um tratado escrito por Luca Pacioli, em 1509, em que chamou a proporção áurea de "Divina Proporção". Inúmeras são as utilidades e curiosidades que envolvem o princípio dessa proporção.

Os pitagóricos encontraram o número 1,618034... para a razão áurea. A letra grega ϕ (Phi) foi utilizada para denotar essa razão em homenagem a Phideas, escultor grego que teria usado muito essa proporção em suas obras.

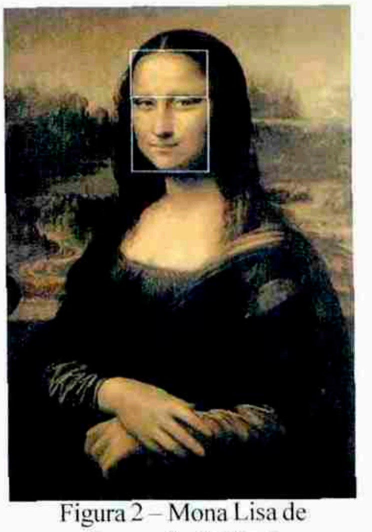

Figura 2 – Mona Lisa de Leonardo da Vinci (www.educ.fc.ul.pt)

Em 1753, o matemático escocês Robert Simson estabeleceu pela primeira vez a relação entre a seqüência de Fibonacci e a proporção áurea, quando provou que a razão entre dois termos consecutivos da seqüência tende ao número áureo.

Meu objetivo é apresentar, neste capítulo, um estudo do número áureo e algumas curiosidades relacionadas a ele.

1.1.2 O número ϕ (Phi)

Seja AB um segmento de reta. Supor C um ponto que está entre os pontos A e B (figura 3).

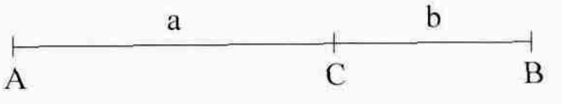

Figura 3

Assim, temos dois segmentos: $AC = a$ e $CB = b$. Dizemos que $\frac{a}{b}$ está na razão áurea se $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

Chamemos $\frac{a}{b}$ de x, então

$$\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b} \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=x \Rightarrow x-\frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x^2-x-1=0,$$

e, resolvendo esta equação de 2º grau, encontraremos as raízes

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Procuramos por uma razão positiva, portanto

$$\phi=\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618034\ldots .$$

Esse número, dito número áureo, possui algumas propriedades interessantes:

$P_1)$ $1+\phi=\phi^2$

$P_2)$ $\phi-1=\frac{1}{\phi}$

$P_3)$ $\phi^2-2=\frac{1}{\phi}$

1.1.3 O retângulo áureo

O retângulo cujas dimensões estão na razão áurea é dito retângulo áureo. Observemos que, se a, b estão em proporção áurea é equivalente dizer que $a^2 = (a + b)b$ e que, geometricamente, equivale dizer que as áreas hachuradas na figura 4 são iguais.

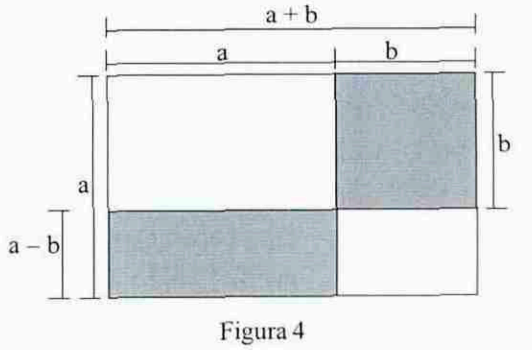

Figura 4

Chamemos $\frac{a}{b}$ de x, então

$$\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b} \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=x \Rightarrow x-\frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x^2-x-1=0,$$

e, resolvendo esta equação de 2º grau, encontraremos as raízes

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Procuramos por uma razão positiva, portanto

$$\phi=\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618034\ldots\ .$$

Esse número, dito número áureo, possui algumas propriedades interessantes:

$P_1)\ 1+\phi=\phi^2$

$P_2)\ \phi-1=\frac{1}{\phi}$

$P_3)\ \phi^2-2=\frac{1}{\phi}$

1.1.3 O retângulo áureo

O retângulo cujas dimensões estão na razão áurea é dito retângulo áureo. Observemos que, se a, b estão em proporção áurea é equivalente dizer que $a^2 = (a + b)b$ e que, geometricamente, equivale dizer que as áreas hachuradas na figura 4 são iguais.

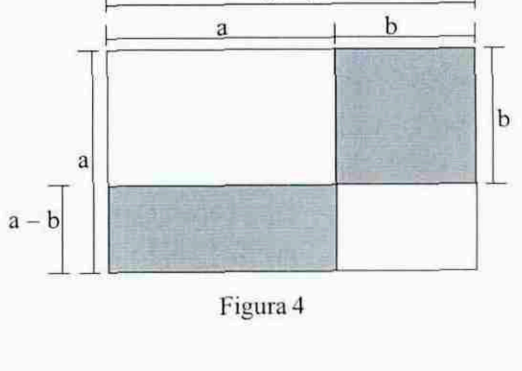

Figura 4

Os objetos e os edifícios sagrados egípcios e gregos possuem geometrias baseadas na divisão do espaço obtida pelos retângulos de raiz (retângulos construídos a partir de quadrados de lado igual a uma unidade específica) e seus derivados (figura 5).

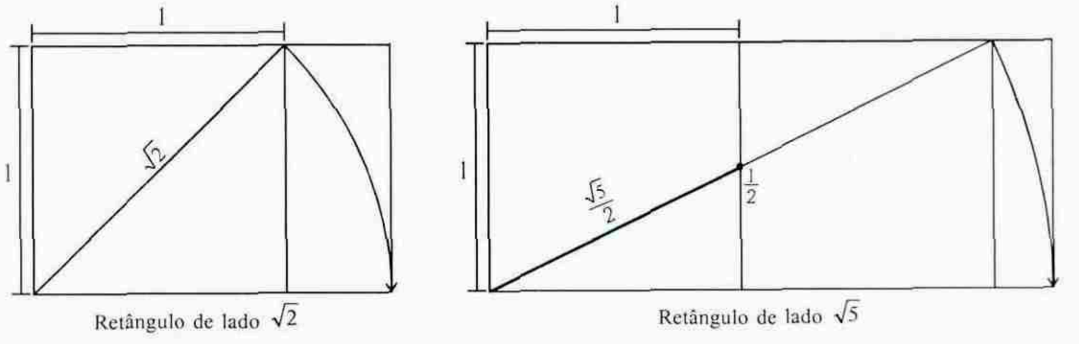

Figura 5 – Retângulos de raiz

Observe que, na figura 6, $\overline{BE} = b \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$, pois se prolongássemos $\overline{BE}$ até encontrar $\overline{AD}$ em um ponto P teríamos que $\overline{AP} = 2\overline{AD}$ e $\overline{BE} = \frac{\overline{EP}}{2}$. Ou seja, $\overline{BE}$ seria a metade do lado de um retângulo de raiz (um retângulo semelhante ao retângulo de raiz da figura 5).

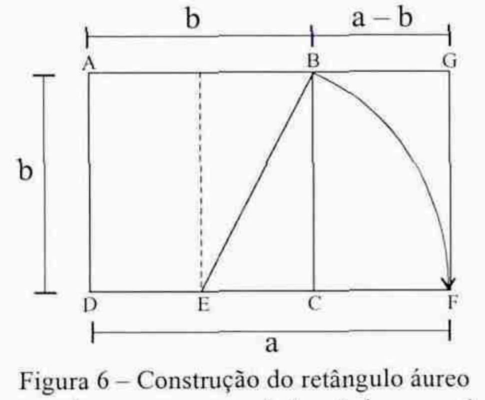

Figura 6 – Construção do retângulo áureo com régua e compasso dado o lado menor b

Assim, é fácil ver que $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DE} + \overline{BE} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot b = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Uma observação importante é que o retângulo BCFG é ainda áureo pois

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a+b-a}{a-b} = \frac{b}{a-b}.$$

Os objetos e os edifícios sagrados egípcios e gregos possuem geometrias baseadas na divisão do espaço obtida pelos retângulos de raiz (retângulos construídos a partir de quadrados de lado igual a uma unidade específica) e seus derivados (figura 5).

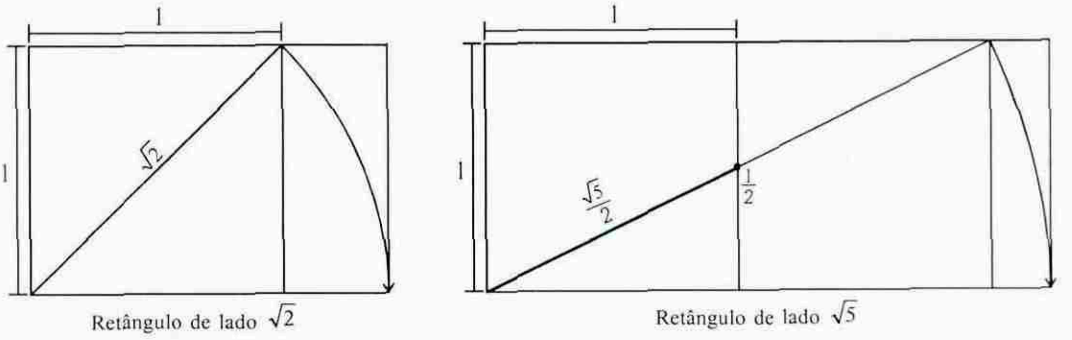

Figura 5 – Retângulos de raiz

Observe que, na figura 6, $\overline{BE} = b \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$, pois se prolongássemos $\overline{BE}$ até encontrar $\overline{AD}$ em um ponto P teríamos que $\overline{AP} = 2\overline{AD}$ e $\overline{BE} = \frac{\overline{EP}}{2}$. Ou seja, $\overline{BE}$ seria a metade do lado de um retângulo de raiz (um retângulo semelhante ao retângulo de raiz da figura 5).

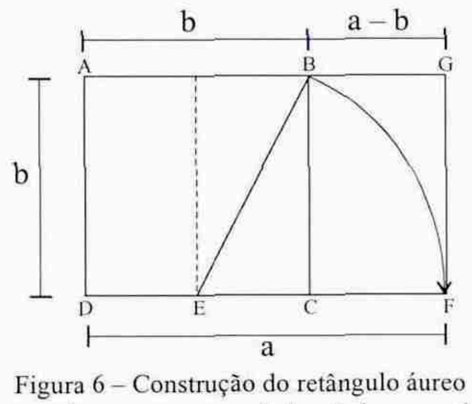

Figura 6 – Construção do retângulo áureo com régua e compasso dado o lado menor b

Assim, é fácil ver que $\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{DE} + \overline{BE} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot b = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Uma observação importante é que o retângulo BCFG é ainda áureo pois

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a+b-a}{a-b} = \frac{b}{a-b}.$$

1.1.4 O retângulo de Fibonacci

Somatório dos quadrados

Juntando dois quadrados unitários (lado = 1), teremos um retângulo 2x1 (sendo que o comprimento 2 é igual à soma dos lados dos quadrados anteriores). Outra vez, anexando outro quadrado com lado = 2 (o maior dos lados do retângulo anterior), teremos um retângulo 3x2. Continuando assim sucessivamente, teremos no limite o retângulo áureo (figura 7).

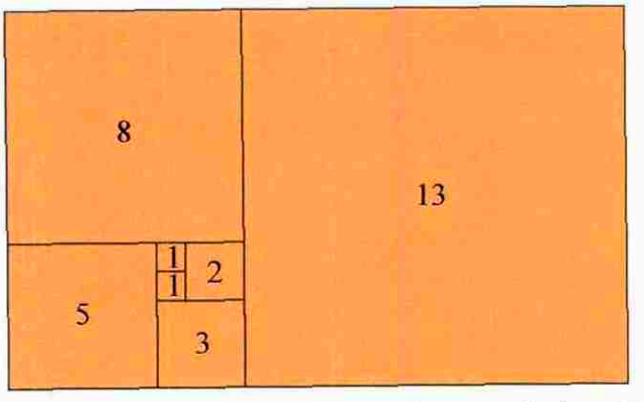

Figura 7 – Retângulo construído a partir de um quadrado unitário

O retângulo de área 21x13 pode ser expresso da seguinte maneira:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \cdot 21$$

Se continuarmos, sucessivamente, a anexar quadrados de lado igual ao comprimento do retângulo obtido nas somas dos quadrados menores, a seqüência que iremos encontrar dos lados dos quadrados será 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33,..., que é a seqüência de Fibonacci (que será definida no item 1.2). Generalizando o somatório dos quadrados, teremos

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Veremos também que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tende a ϕ, ou seja, que os retângulos de lado $F_n \cdot F_{n+1}$ (da sequência de Fibonacci) são aproximações de um retângulo áureo.

1.1.4 O retângulo de Fibonacci

Somatório dos quadrados

Juntando dois quadrados unitários (lado = 1), teremos um retângulo 2x1 (sendo que o comprimento 2 é igual à soma dos lados dos quadrados anteriores). Outra vez, anexando outro quadrado com lado = 2 (o maior dos lados do retângulo anterior), teremos um retângulo 3x2. Continuando assim sucessivamente, teremos no limite o retângulo áureo (figura 7).

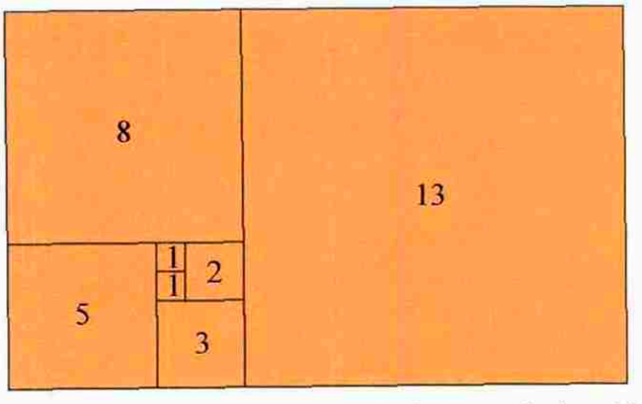

Figura 7 – Retângulo construído a partir de um quadrado unitário

O retângulo de área 21x13 pode ser expresso da seguinte maneira:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \cdot 21$$

Se continuarmos, sucessivamente, a anexar quadrados de lado igual ao comprimento do retângulo obtido nas somas dos quadrados menores, a seqüência que iremos encontrar dos lados dos quadrados será 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33,..., que é a seqüência de Fibonacci (que será definida no item 1.2). Generalizando o somatório dos quadrados, teremos

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} .$$

Veremos também que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tende a ϕ, ou seja, que os retângulos de lado $F_n \cdot F_{n+1}$ (da sequência de Fibonacci) são aproximações de um retângulo áureo.

1.1.5 A espiral logarítmica

A espiral logarítmica é também chamada de eqüiangular, pois os raios que saem do pólo cortam a espiral sob o mesmo ângulo. Para se construir uma espiral logarítmica, basta inscrever 1/4 de uma circunferência em cada quadrado da construção do retângulo áureo, como mostra a figura 8.

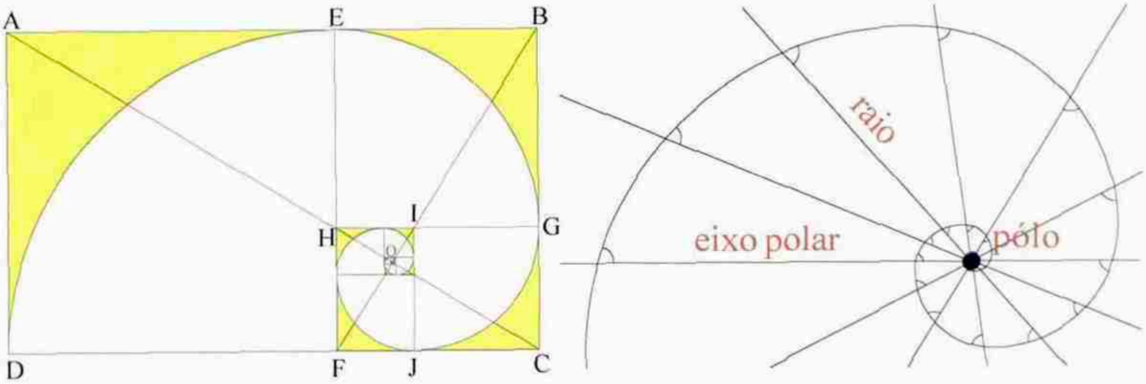

Figura 8 – Espiral logarítmica (www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm)

Na figura 8,

a) O ponto limite O é chamado pólo da espiral;
b) ABCD é retângulo áureo, logo EBCF, HGCF, HIJF, etc. também são;
c) as diagonais AC e BF são mutuamente perpendiculares;
d) os pontos E, O, J são colineares, assim como G, O e D;
e) os ângulos retos AÔB, BÔC, CÔF e FÔA têm EJ e DG por bissetrizes;
f) há um número infinito de triângulos semelhantes (por exemplo, AOB $\approx$ BOC $\approx$ COF $\approx$...) e cada um é igual à metade de um retângulo áureo.

A equação da espiral logarítmica em coordenadas polares é $r = ae^{b\theta}$, em que r é a distância até a origem, θ é o ângulo em relação ao eixo x, e a e b são constantes positivas.

A forma de diversas conchas, por exemplo o nautilus, assemelha-se incrivelmente à espiral logarítmica (figura 9).

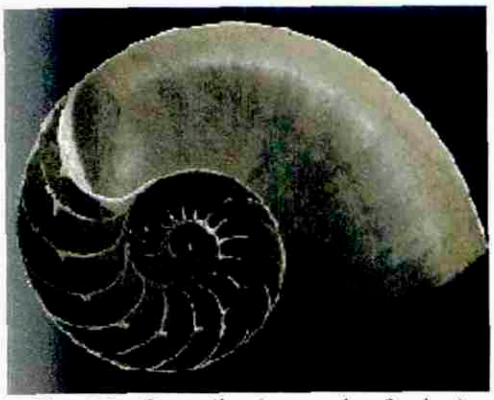

Figura 9 – O nautilus (www.educ.fc.ul.pt)

1.1.5 A espiral logarítmica

A espiral logarítmica é também chamada de eqüiangular, pois os raios que saem do pólo cortam a espiral sob o mesmo ângulo. Para se construir uma espiral logarítmica, basta inscrever 1/4 de uma circunferência em cada quadrado da construção do retângulo áureo, como mostra a figura 8.

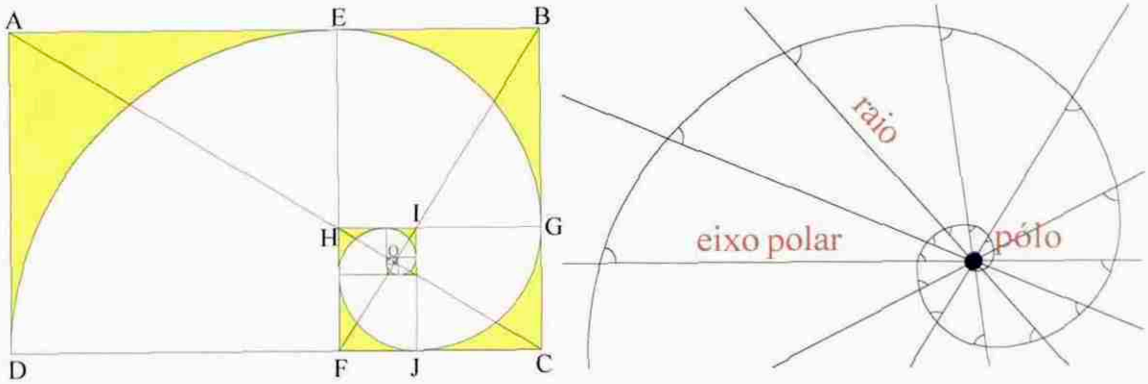

Figura 8 – Espiral logarítmica (www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm)

Na figura 8,

a) O ponto limite O é chamado pólo da espiral;
b) ABCD é retângulo áureo, logo EBCF, HGCF, HIJF, etc. também são;
c) as diagonais AC e BF são mutuamente perpendiculares;
d) os pontos E, O, J são colineares, assim como G, O e D;
e) os ângulos retos AÔB, BÔC, CÔF e FÔA têm EJ e DG por bissetrizes;
f) há um número infinito de triângulos semelhantes (por exemplo, AOB ≈ BOC ≈ COF ≈...) e cada um é igual à metade de um retângulo áureo.

A equação da espiral logarítmica em coordenadas polares é $r = ae^{b\theta}$, em que r é a distância até a origem, θ é o ângulo em relação ao eixo x, e a e b são constantes positivas.

A forma de diversas conchas, por exemplo o nautilus, assemelha-se incrivelmente à espiral logarítmica (figura 9).

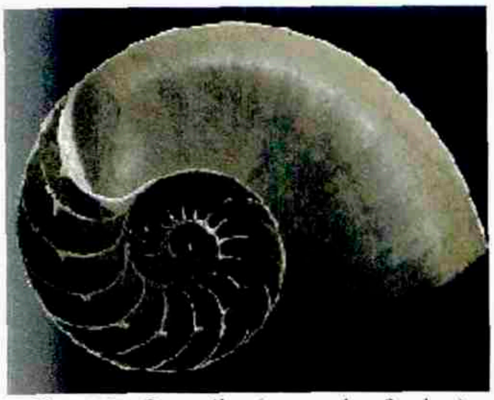

Figura 9 – O nautilus (www.educ.fc.ul.pt)

1.1.6 O pentágono e o pentagrama

O pentagrama místico, tido há muito tempo como uma potente proteção contra energias negativas, é um símbolo geométrico com cinco pontas e a forma de um pentágono no centro. As proporções geométricas de um pentagrama simétrico são as mesmas da "Seção Áurea".

Na figura 10, as razões $\frac{AC}{AB}, \frac{AD}{IJ}, \frac{AI}{IH}$ estão em proporção áurea, além de outras mais.

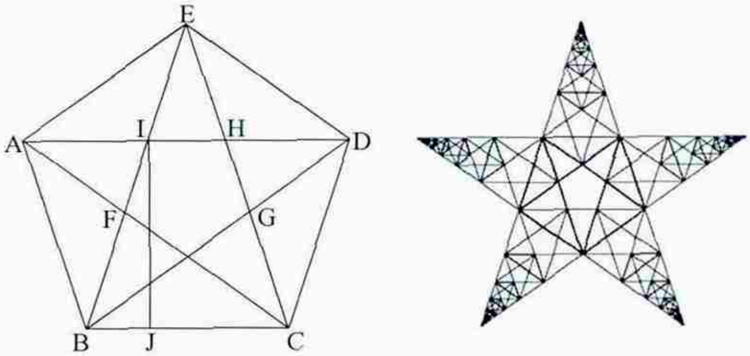

Figura 10 – O pentágono e o pentagrama (www.educ.fc.ul.pt)

1.1.6 O pentágono e o pentagrama

O pentagrama místico, tido há muito tempo como uma potente proteção contra energias negativas, é um símbolo geométrico com cinco pontas e a forma de um pentágono no centro. As proporções geométricas de um pentagrama simétrico são as mesmas da "Seção Áurea".

Na figura 10, as razões $\frac{AC}{AB}, \frac{AD}{IJ}, \frac{AI}{IH}$ estão em proporção áurea, além de outras mais.

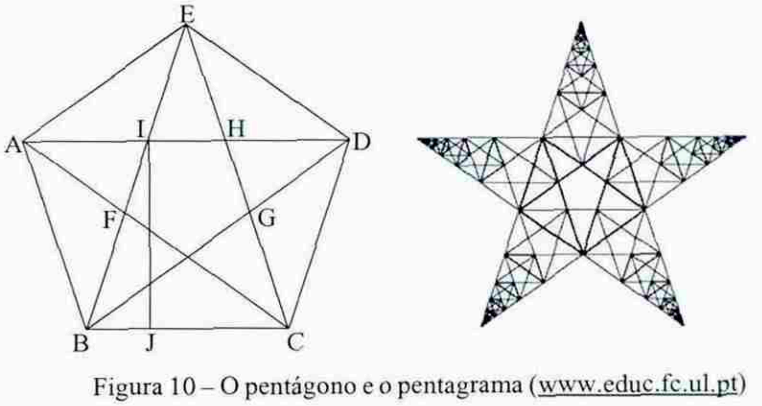

Figura 10 – O pentágono e o pentagrama (www.educ.fc.ul.pt)

1.2 Os números de Fibonacci

Fibonacci, nascido na Itália por volta de 1175 d.C., publicou a obra conhecida como *Liber Abaci*, que foi considerada obra-modelo, pois durante 200 anos contribuiu para a introdução do sistema indo-arábico que ainda hoje utilizamos.

Figura 11 – Provável imagem de Fibonacci (www.malhatlantica.pt)

Nessa obra, Fibonacci apresenta vários problemas matemáticos, dos quais o mais conhecido é o problema "*Paria coniculorum*", ou o problema dos pares de coelhos, que mostrarei a seguir.

> *Quantos pares de coelho podem ser produzidos num ano a partir de um único casal, se:*
> *– cada casal originar um novo casal a cada mês, o qual se torna produtivo no segundo mês;*
> *– não ocorrerem mortes.*

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens. Assim, no início do mês 2, existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par jovem.

No início do terceiro mês, o par adulto terá produzido novamente mais um par, enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir. Assim, no

1.2 Os números de Fibonacci

Fibonacci, nascido na Itália por volta de 1175 d.C., publicou a obra conhecida como *Liber Abaci*, que foi considerada obra-modelo, pois durante 200 anos contribuiu para a introdução do sistema indo-arábico que ainda hoje utilizamos.

Figura 11 – Provável imagem de Fibonacci (www.malhatlantica.pt)

Nessa obra, Fibonacci apresenta vários problemas matemáticos, dos quais o mais conhecido é o problema "*Paria coniculorum*", ou o problema dos pares de coelhos, que mostrarei a seguir.

Quantos pares de coelho podem ser produzidos num ano a partir de um único casal, se:
– cada casal originar um novo casal a cada mês, o qual se torna produtivo no segundo mês;
– não ocorrerem mortes.

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens. Assim, no início do mês 2, existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par jovem.

No início do terceiro mês, o par adulto terá produzido novamente mais um par, enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir. Assim, no início do terceiro mês, existirão três pares de coelhos, sendo 1 par adulto (com 2 meses de idade) + 1 par (com 1 mês de idade) + 1 par jovem. Observe o esquema da figura 12.

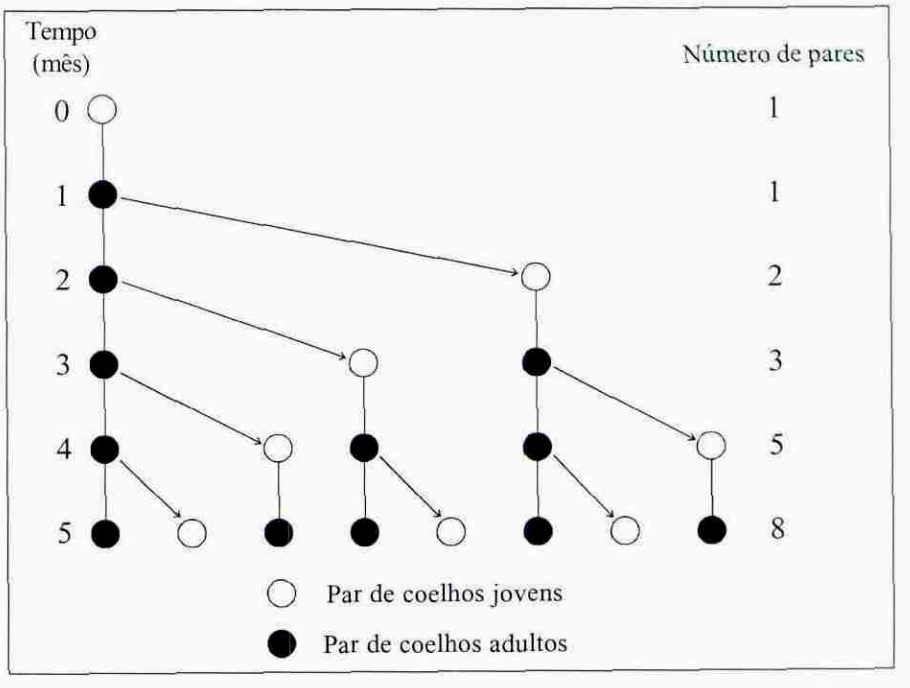

Figura 12 – Esquema do problema dos pares de coelhos de Fibonacci

Seguindo esse raciocínio, pode-se obter a seguinte seqüência de número, a qual conta o número de pares de coelhos existentes ao longo de cada um dos meses de um ano: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. No total, serão 144 pares de coelhos.

1.2.1 A fórmula de Binet

Em 1843, J. P. M. Binet descobriu a fórmula $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, que explicita a conexão entre os números de Fibonacci e a razão áurea. A seguir demonstraremos a fórmula.

Seja $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, $n > 1$, termo da seqüência de Fibonacci (com $F_1 = 1, F_2 = 1$).

Consideremos w_n uma progressão geométrica com w_1=1 e razão não nula q, isto é, $w_n = q^{n-1}$.

início do terceiro mês, existirão três pares de coelhos, sendo 1 par adulto (com 2 meses de idade) + 1 par (com 1 mês de idade) + 1 par jovem. Observe o esquema da figura 12.

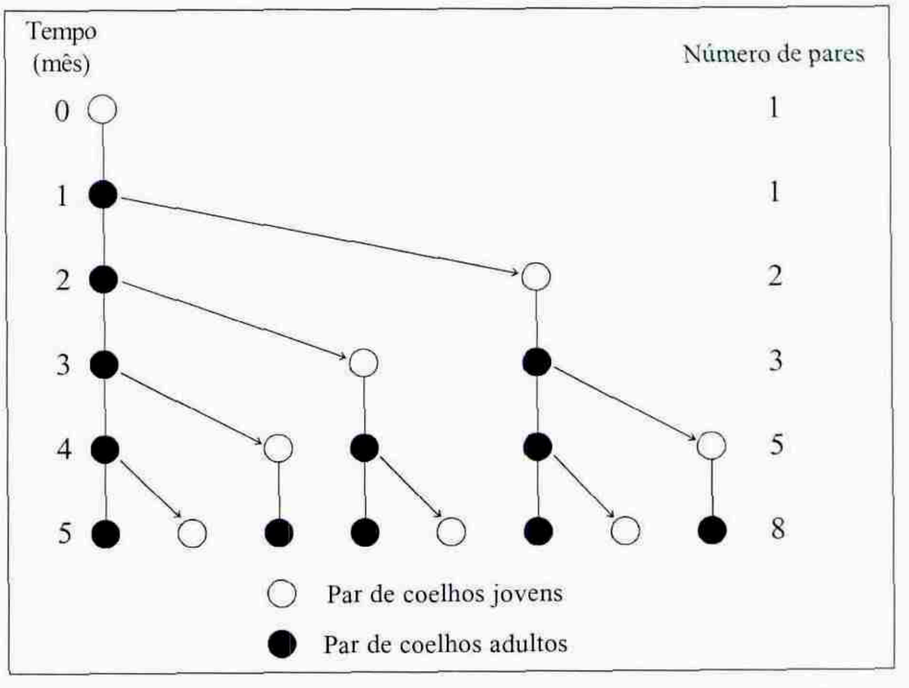

Figura 12 – Esquema do problema dos pares de coelhos de Fibonacci

Seguindo esse raciocínio, pode-se obter a seguinte seqüência de número, a qual conta o número de pares de coelhos existentes ao longo de cada um dos meses de um ano: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. No total, serão 144 pares de coelhos.

1.2.1 A fórmula de Binet

Em 1843, J. P. M. Binet descobriu a fórmula $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, que explicita a conexão entre os números de Fibonacci e a razão áurea. A seguir demonstraremos a fórmula.

Seja $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, $n > 1$, termo da seqüência de Fibonacci (com $F_1 = 1, F_2 = 1$).

Consideremos w_n uma progressão geométrica com w_1=1 e razão não nula q, isto é, $w_n = q^{n-1}$.

Para que esta seqüência seja tipo Fibonacci, devemos ter que:

$w_{n+1} = w_{n-1} + w_n$, ou seja,

$q^n = q^{n-2} + q^{n-1} \Rightarrow q^n = q^n \cdot q^{-2} + q^n \cdot q^{-1}$, multiplicando por $\frac{1}{q^n}$, temos

$1 = q^{-2} + q^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$, multiplicando por q^2, onde obtemos

$q^2 = 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0.$

Resolvendo esta equação de 2º grau, encontramos

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, teremos duas raízes reais, $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Observamos que $q_1 + q_2 = 1$ e $q_1 \cdot q_2 = -1$.

Para cada raiz, obtemos uma seqüência tipo Fibonacci. Logo, podemos construir, através de $v_n = q_1^{\,n-1}$ e $u_n = q_2^{\,n-1}$, uma combinação linear de $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$:

$$a_n = x \cdot v_n + y \cdot w_n = x \cdot \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{n-1} + y \cdot \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{n-1}$$

que é a forma mais geral possível para uma seqüência tipo Fibonacci. Logo, se tomarmos em particular x e y tais que $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, obteremos a seqüência de Fibonacci original, F_n.

Mas $a_1 = a_2 = 1$ implica que $x + y = 1$ e

$x \cdot q_1 + y \cdot q_2 = 1$. Mas

$$x \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + y \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Para que esta seqüência seja tipo Fibonacci, devemos ter que:

$w_{n+1} = w_{n-1} + w_n$, ou seja,

$q^n = q^{n-2} + q^{n-1} \Rightarrow q^n = q^n \cdot q^{-2} + q^n \cdot q^{-1}$, multiplicando por $\frac{1}{q^n}$, temos

$1 = q^{-2} + q^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$, multiplicando por q^2, onde obtemos

$q^2 = 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0.$

Resolvendo esta equação de 2º grau, encontramos

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, teremos duas raízes reais, $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Observamos que $q_1 + q_2 = 1$ e $q_1 \cdot q_2 = -1$.

Para cada raiz, obtemos uma seqüência tipo Fibonacci. Logo, podemos construir, através de $v_n = q_1^{\,n-1}$ e $u_n = q_2^{\,n-1}$, uma combinação linear de $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$:

$$a_n = x \cdot v_n + y \cdot w_n = x \cdot \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{n-1} + y \cdot \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{n-1}$$

que é a forma mais geral possível para uma seqüência tipo Fibonacci. Logo, se tomarmos em particular x e y tais que $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, obteremos a seqüência de Fibonacci original, F_n.

Mas $a_1 = a_2 = 1$ implica que $x + y = 1$ e

$x \cdot q_1 + y \cdot q_2 = 1$. Mas

$$x \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + y \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) + y \cdot \left(1-\sqrt{5}\right) = 2$$

$\Rightarrow x + x \cdot \sqrt{5} + y - y \cdot \sqrt{5} = 2$. Como $x + y = 1$, temos

$x \cdot \sqrt{5} - y \cdot \sqrt{5} + 1 = 2$.

Logo, $x \cdot \sqrt{5} - y \cdot \sqrt{5} = 1$.

Substituindo $y = 1 - x$, teremos $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Logo, $y = -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}$.

Substituindo na expressão de a_n, obteremos a fórmula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

ou, em termos de ϕ,

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

que fornece o termo geral da seqüência de Fibonacci com o uso do número ϕ.

Para n tendendo a infinito, o segundo termo da fórmula de Binet tende a zero, pois a base desta potência em valor absoluto é menor do que 1. Logo, é possível mostrar que, quando n tende a infinito, a expressão matemática para a_n é da ordem de ϕ^n. Assim, o quociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é da ordem de ϕ. Como veremos a seguir, o limite do quociente entre um número de Fibonaci e o seu antecedente converge para o número de ouro ϕ, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$.

Proposição

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, se (F_n) é a seqüência de Fibonacci.

$\Rightarrow x \cdot (1+\sqrt{5}) + y \cdot (1-\sqrt{5}) = 2$

$\Rightarrow x + x \cdot \sqrt{5} + y - y \cdot \sqrt{5} = 2$. Como $x + y = 1$, temos

$x \cdot \sqrt{5} - y \cdot \sqrt{5} + 1 = 2$.

Logo, $x \cdot \sqrt{5} - y \cdot \sqrt{5} = 1$.

Substituindo $y = 1 - x$, teremos $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Logo, $y = -\dfrac{(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$.

Substituindo na expressão de a_n, obteremos a fórmula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

ou, em termos de ϕ,

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

que fornece o termo geral da seqüência de Fibonacci com o uso do número ϕ.

Para n tendendo a infinito, o segundo termo da fórmula de Binet tende a zero, pois a base desta potência em valor absoluto é menor do que 1. Logo, é possível mostrar que, quando n tende a infinito, a expressão matemática para a_n é da ordem de ϕ^n. Assim, o quociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é da ordem de ϕ. Como veremos a seguir, o limite do quociente entre um número de Fibonaci e o seu antecedente converge para o número de ouro ϕ, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \phi$.

Proposição

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, se (F_n) é a seqüência de Fibonacci.

Demonstração

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \phi^n \left[\phi - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n \cdot (1-\phi)\right] \quad \text{e}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \phi^n \left[1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n\right].$$

Logo, $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{\phi - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n (1-\phi)}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n}$.

Mas $\left|\dfrac{1-\phi}{\phi}\right| = \dfrac{|1-\phi|}{\phi} < 1$, pois $|1-\phi| < 1$ e $\phi > 1$.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\phi}{\phi}\right)^n = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

1.2.2 Os números de Fibonacci a partir de uma função geratriz

Um modo de obter uma seqüência de números inteiros é construir uma função geratriz $B = B(x)$ definida como uma **série formal** de potências:

$$B(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \ldots$$

cujos coeficientes b_i sejam os valores da seqüência que desejamos. O principal neste contexto é a construção de $B(x)$ através de uma fórmula analítica onde b_i aparece naturalmente.

Demonstração

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \phi^n \left[\phi - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n \cdot (1-\phi)\right] \quad \text{e}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \phi^n \left[1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n\right].$$

Logo, $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{\phi - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n (1-\phi)}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n}$.

Mas $\left|\dfrac{1-\phi}{\phi}\right| = \dfrac{|1-\phi|}{\phi} < 1$, pois $|1-\phi| < 1$ e $\phi > 1$.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\phi}{\phi}\right)^n = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

1.2.2 Os números de Fibonacci a partir de uma função geratriz

Um modo de obter uma seqüência de números inteiros é construir uma função geratriz $B = B(x)$ definida como uma **série formal** de potências:

$$B(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \ldots$$

cujos coeficientes b_i sejam os valores da seqüência que desejamos. O principal neste contexto é a construção de $B(x)$ através de uma fórmula analítica onde b_i aparece naturalmente.

Por exemplo, a seqüência $f(n) = 2^{n-1}$, para n inteiro, $n \geq 1$. O conjunto imagem desta função é

$$f(N)=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...\}$$

e pode ser representado pela função geratriz

$$B(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + ... ,$$

que pode ser escrita na forma

$$B(x) = \frac{1}{(1-2x)},$$ que é a soma da p.g. infinita de razão 2x.

Mas para que isso faça sentido, deve ocorrer a convergência da série, o que depende do fato que $|2x| < 1$. Por isso dissemos no início que esta é uma série **formal**.

Tendo em vista o que apresentamos acima, vamos assumir que exista uma função geratriz dos números da seqüência de Fibonacci e tentar encontrar uma relação que tenha o mesmo comportamento dos coeficientes desta função.

Tomemos uma função não nula $B = B(x)$ tal que

$$B(x) = F_o + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + F_5 x^5 + ...$$

Esta **soma formal** também pode ser escrita como um somatório de todos os números inteiros $k \geq 0$, que denotaremos por

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k ,$$

que pode ser reescrito como (observar a mudança no índice)

$$B(x) = F_o + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k .$$

Note que, pelo teste da razão, essa série converge absolutamente se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}x^{n+1}}{F_n x^n}\right| < 1$, isto é, se $|x| < \frac{1}{\phi}$, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

Por exemplo, a seqüência $f(n) = 2^{n-1}$, para n inteiro, $n \geq 1$. O conjunto imagem desta função é

$$f(N)=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...\}$$

e pode ser representado pela função geratriz

$$B(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + ... ,$$

que pode ser escrita na forma

$B(x) = \dfrac{1}{(1-2x)}$, que é a soma da p.g. infinita de razão $2x$.

Mas para que isso faça sentido, deve ocorrer a convergência da série, o que depende do fato que $|2x| < 1$. Por isso dissemos no início que esta é uma série **formal**.

Tendo em vista o que apresentamos acima, vamos assumir que exista uma função geratriz dos números da seqüência de Fibonacci e tentar encontrar uma relação que tenha o mesmo comportamento dos coeficientes desta função.

Tomemos uma função não nula $B = B(x)$ tal que

$$B(x) = F_o + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + F_5 x^5 + ...$$

Esta **soma formal** também pode ser escrita como um somatório de todos os números inteiros $k \geq 0$, que denotaremos por

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k ,$$

que pode ser reescrito como (observar a mudança no índice)

$$B(x) = F_o + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k .$$

Note que, pelo teste da razão, essa série converge absolutamente se $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{F_{n+1} x^{n+1}}{F_n x^n} \right| < 1$, isto é, se $|x| < \dfrac{1}{\phi}$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

Acontece que $F_o = F_1 = 1$ e $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para todo $k>1$. Logo,

$$B(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty}[F_{k-1} + F_{k-2}]x^k$$

$$B(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^k$$

$$B(x) = 1 + x + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^{k-2}$$

$$B(x) = 1 + x + x \sum_{j=1}^{\infty} F_j x^j + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} F_j x^j$$

$$B(x) = 1 + x + x\,[B(x)-1] + x^2 B(x).$$

Extraindo o valor de $B = B(x)$, segue que

$$B(x) = \frac{1}{(1 - x - x^2)},$$

que é a função geradora dos números de Fibonacci.

Observe que a divisão $\frac{1}{(1-x-x^2)}$ resulta na série **formal** de potências cujos coeficientes são os números da seqüência de Fibonacci.

$$\begin{array}{l|l}
1 & (1 - x - x^2) \\
\underline{-1 + x + x^2} & \overline{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 \ldots} \\
\quad x + x^2 & \\
\quad \underline{-x + x^2 + x^3} & \\
\qquad 2x^2 + x^3 & \\
\qquad \underline{-2x^2 + 2x^3 + 2x^4} & \\
\qquad\quad 3x^3 + 2x^4 & \\
\qquad\quad \underline{-3x^3 + 3x^4 + 3x^5} & \\
\qquad\qquad 5x^4 + 3x^5 & \\
\qquad\qquad \underline{-5x^4 + 5x^5 + 5x^6} & \\
\qquad\qquad\quad 8x^5 + 5x^6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-8x^5 + 8x^6 + 8x^7} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^6 + 8x^7 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \vdots &
\end{array}$$

Acontece que $F_o = F_1 = 1$ e $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para todo $k>1$. Logo,

$$B(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[F_{k-1} + F_{k-2}\right]x^k$$

$$B(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty}F_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty}F_{k-2}x^k$$

$$B(x) = 1 + x + x\sum_{k=2}^{\infty}F_{k-1}x^{k-1} + x^2\sum_{k=2}^{\infty}F_{k-2}x^{k-2}$$

$$B(x) = 1 + x + x\sum_{j=1}^{\infty}F_jx^j + x^2\sum_{j=0}^{\infty}F_jx^j$$

$$B(x) = 1 + x + x\,[B(x)-1] + x^2\,B(x).$$

Extraindo o valor de $B = B(x)$, segue que

$$B(x) = \frac{1}{\left(1 - x - x^2\right)},$$

que é a função geradora dos números de Fibonacci.

Observe que a divisão $\frac{1}{\left(1 - x - x^2\right)}$ resulta na série **formal** de potências cujos coeficientes são os números da seqüência de Fibonacci.

$$\begin{array}{r|l}
1 & (1 - x - x^2) \\
\underline{-1 + x + x^2} & \overline{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 \ldots} \\
x + x^2 & \\
\underline{-x + x^2 + x^3} & \\
2x^2 + x^3 & \\
\underline{-2x^2 + 2x^3 + 2x^4} & \\
3x^3 + 2x^4 & \\
\underline{-3x^3 + 3x^4 + 3x^5} & \\
5x^4 + 3x^5 & \\
\underline{-5x^4 + 5x^5 + 5x^6} & \\
8x^5 + 5x^6 & \\
\underline{-8x^5 + 8x^6 + 8x^7} & \\
8x^6 + 8x^7 & \\
\vdots &
\end{array}$$

1.2.3 Curiosidades

Vejamos alguns fatos curiosos sobre os números de Fibonacci:

a) a soma de dez números consecutivos da seqüência é sempre divisível por 11;

b) a cada 3 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 2,
a cada 4 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 3,
a cada 5 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 5,
a cada 6 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 8,
a cada 7 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 13,
a cada 8 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 21,
e assim sucessivamente, obtemos que a cada n números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por F_n;

c) dois números consecutivos são primos entre si;

d) o número 144 (quadrado de 12) é o único número quadrado da seqüência inteira (sem contar o número 1).

Outra ocorrência dos números de Fibonacci se dá na filotaxia, designação que se emprega em botânica para descrever a disposição das folhas nas plantas.

Algumas plantas apresentam os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos, folhas e pétalas.

Por exemplo, se olharmos bem para o girassol (figura 13), acabaremos por reconhecer padrões visuais específicos no modo como as sementes estão dispostas. Estas se encontram alinhadas de tal modo, a partir do centro, que formam linhas em espiral, tanto para a esquerda como para a direita. A quantidade de linhas é um número da seqüência de Fibonacci.

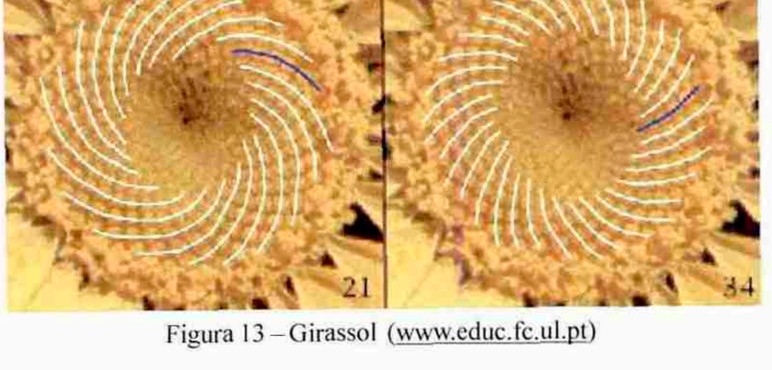

Figura 13 – Girassol (www.educ.fc.ul.pt)

1.2.3 Curiosidades

Vejamos alguns fatos curiosos sobre os números de Fibonacci:

a) a soma de dez números consecutivos da seqüência é sempre divisível por 11;

b) a cada 3 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 2,
a cada 4 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 3,
a cada 5 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 5,
a cada 6 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 8,
a cada 7 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 13,
a cada 8 números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por 21,
e assim sucessivamente, obtemos que a cada n números da seqüência de Fibonacci temos um número divisível por F_n;

c) dois números consecutivos são primos entre si;

d) o número 144 (quadrado de 12) é o único número quadrado da seqüência inteira (sem contar o número 1).

Outra ocorrência dos números de Fibonacci se dá na filotaxia, designação que se emprega em botânica para descrever a disposição das folhas nas plantas.

Algumas plantas apresentam os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos, folhas e pétalas.

Por exemplo, se olharmos bem para o girassol (figura 13), acabaremos por reconhecer padrões visuais específicos no modo como as sementes estão dispostas. Estas se encontram alinhadas de tal modo, a partir do centro, que formam linhas em espiral, tanto para a esquerda como para a direita. A quantidade de linhas é um número da seqüência de Fibonacci.

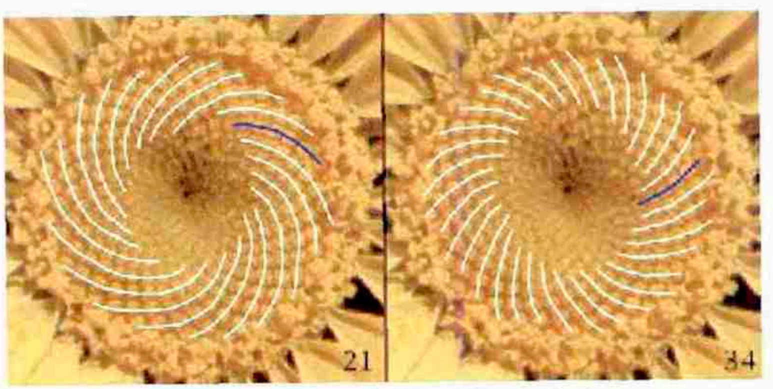

Figura 13 – Girassol (www.educ.fc.ul.pt)

Analisando uma haste da cerejeira (figura 14), veremos que as folhas que dela brotam seguem uma seqüência. Tomando a folha que se situe mais abaixo (na figura, a folha 1) como ponto de partida e contando em direção ao topo as folhas restantes até chegarmos à que tem a mesma disposição da folha inicial, veremos que as folhas se encontram dispostas em espiral ao redor do caule e que o número de folhas é um número da seqüência de Fibonacci. No caso da cerejeira, são 5 folhas, enquanto que na pereira são 8 folhas.

Ao considerar o número de pétalas presentes em algumas flores, teremos os lírios, íris e jarros com 3 pétalas; columbinas, rainúnculos amarelos e rosas silvestres com 5 pétalas; e delfínios, cosmos e tormentilhas com 8 pétalas.

Podemos analisar também os ramos de troncos de árvores, como é o caso da planta *Achillea ptarmica* (figura 15), onde a cada mês nasce um novo broto de um galho, sendo que o broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto.

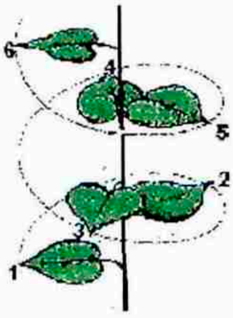

Figura 14
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm)

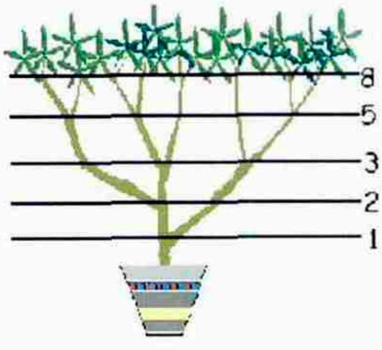

Figura 15
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm)

1.2.4 Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

Neste item iremos provar que a soma dos elementos de qualquer diagonal do triângulo de Pascal resulta em um número de Fibonacci.

Consideremos $C_{m,n}$ a combinação de m elementos tomados n a n, como

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Analisando uma haste da cerejeira (figura 14), veremos que as folhas que dela brotam seguem uma seqüência. Tomando a folha que se situe mais abaixo (na figura, a folha 1) como ponto de partida e contando em direção ao topo as folhas restantes até chegarmos à que tem a mesma disposição da folha inicial, veremos que as folhas se encontram dispostas em espiral ao redor do caule e que o número de folhas é um número da seqüência de Fibonacci. No caso da cerejeira, são 5 folhas, enquanto que na pereira são 8 folhas.

Ao considerar o número de pétalas presentes em algumas flores, teremos os lírios, íris e jarros com 3 pétalas; columbinas, rainúnculos amarelos e rosas silvestres com 5 pétalas; e delfínios, cosmos e tormentilhas com 8 pétalas.

Podemos analisar também os ramos de troncos de árvores, como é o caso da planta *Achillea ptarmica* (figura 15), onde a cada mês nasce um novo broto de um galho, sendo que o broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto.

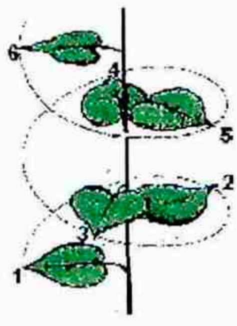

Figura 14
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm)

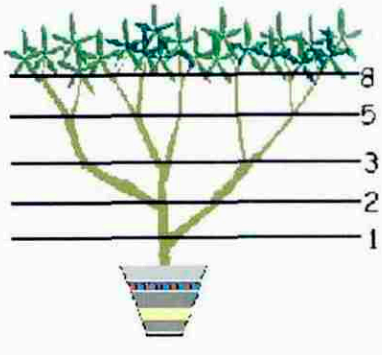

Figura 15
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm)

1.2.4 Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

Neste item iremos provar que a soma dos elementos de qualquer diagonal do triângulo de Pascal resulta em um número de Fibonacci.

Consideremos $C_{m,n}$ a combinação de m elementos tomados n a n, como

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}\ .$$

O triângulo de Pascal pode ser obtido numericamente somando-se dois números consecutivos da mesma linha com o resultado colocado sob o segundo número somado, ou através das combinações que aparecem na figura 16.

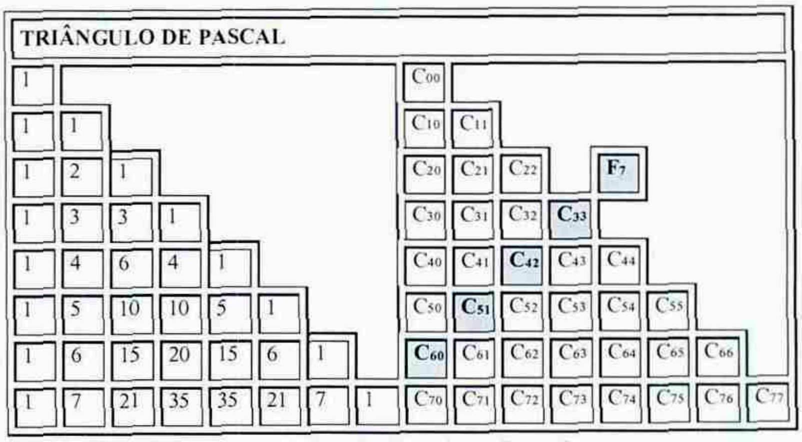

Figura 16 – Triângulo de Pascal
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html)

A altura de uma combinação $C_{m,n}$ é a soma dos índices que aparecem na combinação, isto é:

$$\text{altura}(C_{m,n}) = m + n\,.$$

Por exemplo, as alturas das combinações $C_{6,0}$, $C_{5,1}$, $C_{4,2}$, $C_{3,3}$ são todas iguais a 6, e observamos que o 7º termo da seqüência de Fibonacci é dado por:

$$F_7 = C_{6,0} + C_{5,1} + C_{4,2} + C_{3,3}\,.$$

Esta é uma propriedade que relaciona o triângulo de Pascal com os números de Fibonacci, mostrando que a soma de todas as combinações $C_{m,n}$ que aparecem no triângulo de Pascal, com uma mesma altura p, de tal modo que $p = m + n$ e $m \geq n$, corresponde ao termo de ordem $p + 1$ da seqüência de Fibonacci, isto é:

$$F_{p+1} = C_{p,0} + C_{p-1,1} + C_{p-2,2} + C_{p-3,3} + \ldots + C_{p-n,n}\,,$$

sendo que p deve ser maior ou igual a 2n.

De acordo com o triângulo de Pascal:

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}\,.$$

***

O triângulo de Pascal pode ser obtido numericamente somando-se dois números consecutivos da mesma linha com o resultado colocado sob o segundo número somado, ou através das combinações que aparecem na figura 16.

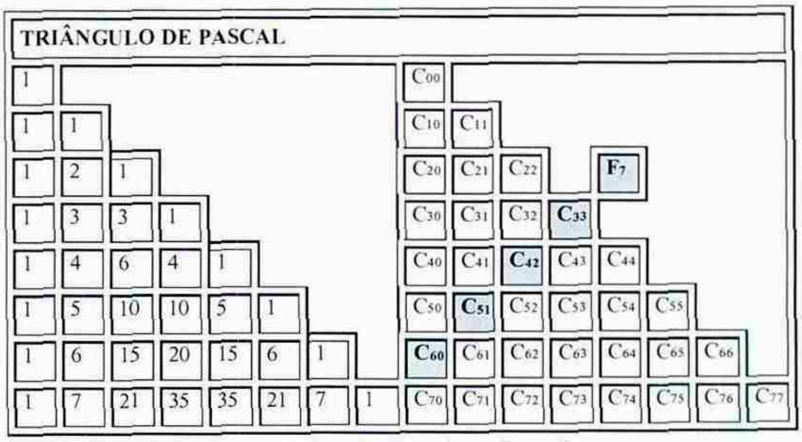

Figura 16 – Triângulo de Pascal
(http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html)

A altura de uma combinação $C_{m,n}$ é a soma dos índices que aparecem na combinação, isto é:

$$\text{altura}(C_{m,n}) = m + n\,.$$

Por exemplo, as alturas das combinações $C_{6,0}$, $C_{5,1}$, $C_{4,2}$, $C_{3,3}$ são todas iguais a 6, e observamos que o 7º termo da seqüência de Fibonacci é dado por:

$$F_7 = C_{6,0} + C_{5,1} + C_{4,2} + C_{3,3}\,.$$

Esta é uma propriedade que relaciona o triângulo de Pascal com os números de Fibonacci, mostrando que a soma de todas as combinações $C_{m,n}$ que aparecem no triângulo de Pascal, com uma mesma altura p, de tal modo que $p = m + n$ e $m \geq n$, corresponde ao termo de ordem $p + 1$ da seqüência de Fibonacci, isto é:

$$F_{p+1} = C_{p,0} + C_{p-1,1} + C_{p-2,2} + C_{p-3,3} + \ldots + C_{p-n,n}\,,$$

sendo que p deve ser maior ou igual a 2n.

De acordo com o triângulo de Pascal:

$$C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}\,.$$

***

Agora, vamos provar que a soma dos componentes de uma diagonal do triângulo de Pascal resulta em um número da seqüência de Fibonacci.

Para isso, basta provar que a soma de duas diagonais consecutivas resulta em uma terceira diagonal consecutiva às outras duas somadas.

Verifiquemos as primeiras diagonais:

$d_1 = C_{0,0} = 1$

$d_2 = C_{1,0} = 1$

$d_3 = C_{2,0} + C_{1,1} = 2$

$d_4 = C_{3,0} + C_{2,1} = 3$

$d_5 = C_{4,0} + C_{3,1} + C_{2,2} = 5$

$d_6 = C_{5,0} + C_{4,1} + C_{3,2} = 8$

$d_7 = C_{6,0} + C_{5,1} + C_{4,2} + C_{3,3} = 13$

$d_8 = C_{7,0} + C_{6,1} + C_{5,2} + C_{4,3} = 21$

Considere para k ímpar

$$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{k-1-n,n}.$$

Logo, $n = \dfrac{k-1}{2}$, ou seja,

$$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{\frac{k-1}{2},\frac{k-1}{2}}.$$

Fazendo o mesmo para k par,

$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{k-n-1,n}$, obtemos que $k - 1 - n = \dfrac{k}{2}$, então,

$$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}-1}.$$

***

Agora, vamos provar que a soma dos componentes de uma diagonal do triângulo de Pascal resulta em um número da seqüência de Fibonacci.

Para isso, basta provar que a soma de duas diagonais consecutivas resulta em uma terceira diagonal consecutiva às outras duas somadas.

Verifiquemos as primeiras diagonais:

$d_1 = C_{0,0} = 1$

$d_2 = C_{1,0} = 1$

$d_3 = C_{2,0} + C_{1,1} = 2$

$d_4 = C_{3,0} + C_{2,1} = 3$

$d_5 = C_{4,0} + C_{3,1} + C_{2,2} = 5$

$d_6 = C_{5,0} + C_{4,1} + C_{3,2} = 8$

$d_7 = C_{6,0} + C_{5,1} + C_{4,2} + C_{3,3} = 13$

$d_8 = C_{7,0} + C_{6,1} + C_{5,2} + C_{4,3} = 21$

Considere para k ímpar

$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{k-1-n,n}$.

Logo, $n = \dfrac{k-1}{2}$, ou seja,

$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{\frac{k-1}{2},\frac{k-1}{2}}$.

Fazendo o mesmo para k par,

$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{k-n-1,n}$, obtemos que $k - 1 - n = \dfrac{k}{2}$, então,

$d_k = C_{k-1,0} + C_{k-2,1} + C_{k-3,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}-1}$.

***

Notemos o número de elementos de cada diagonal:

$\#d_1 = 1$	$\#d_5 = 3$	$\#d_9 = 5$
$\#d_2 = 1$	$\#d_6 = 3$	$\#d_{10} = 5$
$\#d_3 = 2$	$\#d_7 = 4$	$\#d_{11} = 6$
$\#d_4 = 2$	$\#d_8 = 4$	$\#d_{12} = 6$ . . .

Seguindo por indução, o número de elementos para d_k ímpar será $\frac{k+1}{2}$ elementos, e para d_k par teremos $\frac{k}{2}$ elementos.

***

Provaremos, então, que $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$.

Fazendo $k+1$ ímpar, teremos

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}},$$

e, para $k+2$ (par), teremos

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}.$$

Assim,

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} \quad \text{e}$$

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}.$$

Portanto, somando d_{k+1} com d_{k+2}, teremos

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + \left(C_{k,0} + C_{k,1}\right) + \left(C_{k-1,1} + C_{k-1,2}\right) + \ldots + \left(C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}\right) + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}.$$

Usando a propriedade $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$,

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}},$$

Notemos o número de elementos de cada diagonal:

$\#d_1 = 1$	$\#d_5 = 3$	$\#d_9 = 5$
$\#d_2 = 1$	$\#d_6 = 3$	$\#d_{10} = 5$
$\#d_3 = 2$	$\#d_7 = 4$	$\#d_{11} = 6$
$\#d_4 = 2$	$\#d_8 = 4$	$\#d_{12} = 6$ . . .

Seguindo por indução, o número de elementos para d_k ímpar será $\frac{k+1}{2}$ elementos, e para d_k par teremos $\frac{k}{2}$ elementos.

***

Provaremos, então, que $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$.

Fazendo $k+1$ ímpar, teremos

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}},$$

e, para $k+2$ (par), teremos

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}.$$

Assim,

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} \quad \text{e}$$

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}.$$

Portanto, somando d_{k+1} com d_{k+2}, teremos

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + \left(C_{k,0} + C_{k,1}\right) + \left(C_{k-1,1} + C_{k-1,2}\right) + \ldots + \left(C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}-1} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}}\right) + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}.$$

Usando a propriedade $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$,

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}},$$

e, sabendo que $C_{k+1,0} = C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} = 1$, então podemos "ajustar" a fórmula fazendo

$C_{k+1,0} = C_{k+2,0}$ e $C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} = C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}$. Então

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}.$$

De fato, para $k+3$ (ímpar), teremos

$$d_{k+3} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}.$$

Logo, $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$, para $k+1$ ímpar.

***

Verificaremos, agora, para $k+1$ par.

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}}$$

e, para $k+2$ (ímpar), teremos

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}},$$

Seguindo, assim,

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}} \quad \text{e}$$

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

Somando d_{k+1} com d_{k+2}, teremos

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + \left(C_{k,0} + C_{k,1}\right) + \left(C_{k-1,1} + C_{k-1,2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}}\right) + \left(C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}}\right).$$

e, sabendo que $C_{k+1,0} = C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} = 1$, então podemos "ajustar" a fórmula fazendo

$C_{k+1,0} = C_{k+2,0}$ e $C_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} = C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}$. Então

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}.$$

De fato, para $k+3$ (ímpar), teremos

$$d_{k+3} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+1}.$$

Logo, $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$, para $k+1$ ímpar.

***

Verificaremos, agora, para $k+1$ par.

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}}$$

e, para $k+2$ (ímpar), teremos

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}},$$

Seguindo, assim,

$$d_{k+1} = C_{k,0} + C_{k-1,1} + C_{k-2,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}} \quad \text{e}$$

$$d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k,1} + C_{k-1,2} + \ldots + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

Somando d_{k+1} com d_{k+2}, teremos

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + (C_{k,0} + C_{k,1}) + (C_{k-1,1} + C_{k-1,2}) + \ldots$$

$$\ldots + \left(C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-3}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k-1}{2}} \right) + \left(C_{\frac{k+1}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}} \right).$$

Usando a propriedade $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$, teremos

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}},$$ e fazendo

$C_{k+1,0} = C_{k+2,0}$, segue que

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

De fato, para $k+3$ (par), teremos

$$d_{k+3} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

Logo, $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$, para $k+1$ par.

***

Usando a propriedade $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$, teremos

$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+1,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}}$, e fazendo

$C_{k+1,0} = C_{k+2,0}$, segue que

$$d_{k+1} + d_{k+2} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

De fato, para $k+3$ (par), teremos

$$d_{k+3} = C_{k+2,0} + C_{k+1,1} + C_{k,2} + \ldots + C_{\frac{k+5}{2},\frac{k-1}{2}} + C_{\frac{k+3}{2},\frac{k+1}{2}}.$$

Logo, $d_{k+1} + d_{k+2} = d_{k+3}$, para $k + 1$ par.

***

Capítulo 2

Números curiosos

2.1 Os números perfeitos

Um número perfeito é qualquer número cuja soma de seus divisores próprios resulta nele mesmo. Este conjunto de números inteiros possui curiosas propriedades. Como exemplo, temos o número 6 (resultado da soma de seus divisores próprios 1, 2 e 3) e o 28 (resultado da soma de seus divisores próprios 1, 2, 4, 7 e 14).

Para os estudiosos místicos, o número 6 significa a perfeição do universo: o mundo bíblico foi criado em 6 dias; o número 28 representa a quantidade de dias que a Lua leva para girar em torno da Terra.

Hoje, são conhecidos apenas 39 números perfeitos. Na figura 17, mostramos uma lista com as fórmulas de alguns dos números perfeitos, o número de dígitos de cada um deles e os próprios números perfeitos (só até o oitavo, porque após isso os números ficam excessivamente grandes).

	Fórmula	Número	Número de dígitos
1	$2^{1}(2^{2}-1)$	6	1
2	$2^{2}(2^{3}-1)$	28	2
3	$2^{4}(2^{5}-1)$	496	3
4	$2^{6}(2^{7}-1)$	8.128	4
5	$2^{12}(2^{13}-1)$	33.550.336	8
6	$2^{16}(2^{17}-1)$	8.589.869.056	10
7	$2^{18}(2^{19}-1)$	137.438.691.328	12
8	$2^{30}(2^{31}-1)$	2.305.843.008.139.952.128	19
9	$2^{60}(2^{61}-1)$		37
10	$2^{88}(2^{89}-1)$		54
11	$2^{106}(2^{107}-1)$		65
12	$2^{126}(2^{127}-1)$		77
13	$2^{520}(2^{521}-1)$		314
14	$2^{606}(2^{607}-1)$		366
15	$2^{1.278}(2^{1.279}-1)$		770
16	$2^{2.202}(2^{2.203}-1)$		1.327
17	$2^{2.280}(2^{2.281}-1)$		1.373
18	$2^{3.216}(2^{3.217}-1)$		1.937
19	$2^{4.252}(2^{4.253}-1)$		2.561
20	$2^{4.422}(2^{4.423}-1)$		2.663

Figura 17 – Lista de alguns números perfeitos [2]

Capítulo 2

Números curiosos

2.1 Os números perfeitos

Um número perfeito é qualquer número cuja soma de seus divisores próprios resulta nele mesmo. Este conjunto de números inteiros possui curiosas propriedades. Como exemplo, temos o número 6 (resultado da soma de seus divisores próprios 1, 2 e 3) e o 28 (resultado da soma de seus divisores próprios 1, 2, 4, 7 e 14).

Para os estudiosos místicos, o número 6 significa a perfeição do universo: o mundo bíblico foi criado em 6 dias; o número 28 representa a quantidade de dias que a Lua leva para girar em torno da Terra.

Hoje, são conhecidos apenas 39 números perfeitos. Na figura 17, mostramos uma lista com as fórmulas de alguns dos números perfeitos, o número de dígitos de cada um deles e os próprios números perfeitos (só até o oitavo, porque após isso os números ficam excessivamente grandes).

	Fórmula	Número	Número de dígitos
1	$2^{1} (2^{2} - 1)$	6	1
2	$2^{2} (2^{3} - 1)$	28	2
3	$2^{4} (2^{5} - 1)$	496	3
4	$2^{6} (2^{7} - 1)$	8.128	4
5	$2^{12} (2^{13} - 1)$	33.550.336	8
6	$2^{16} (2^{17} - 1)$	8.589.869.056	10
7	$2^{18} (2^{19} - 1)$	137.438.691.328	12
8	$2^{30} (2^{31} - 1)$	2.305.843.008.139.952.128	19
9	$2^{60} (2^{61} - 1)$		37
10	$2^{88} (2^{89} - 1)$		54
11	$2^{106} (2^{107} - 1)$		65
12	$2^{126} (2^{127} - 1)$		77
13	$2^{520} (2^{521} - 1)$		314
14	$2^{606} (2^{607} - 1)$		366
15	$2^{1.278} (2^{1.279} - 1)$		770
16	$2^{2.202} (2^{2.203} - 1)$		1.327
17	$2^{2.280} (2^{2.281} - 1)$		1.373
18	$2^{3.216} (2^{3.217} - 1)$		1.937
19	$2^{4.252} (2^{4.253} - 1)$		2.561
20	$2^{4.422} (2^{4.423} - 1)$		2.663

Figura 17 – Lista de alguns números perfeitos [2]

Outra curiosidade refere-se ao fato de nunca ter sido provado que existe um número perfeito ímpar. Os próximos itens mostram um breve estudo de números perfeitos, incluindo a fórmula de Euclides e a demonstração para os dígitos finais dos números perfeitos pares (que sempre terminam em 6 ou 28).

2.1.1 Quantidade de divisores de um número

Seja n um número natural (maior que 1) qualquer. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos representar esse número na forma

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r},$$

sendo $p_1, p_2, \ldots, p_r$ divisores primos de n.

Chamemos F_r o número de divisores de n. Então $F_r(n) = F_r = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_r + 1)$.

Vamos provar essa fórmula por indução em r, o número de divisores primos de n.

Supor $r = 1$. Então $n = p^a$.

$\Rightarrow$ {Divisores de n} $= \{p^0, p^1, \ldots, p^a\}$.

Então o número de divisores é $F_1 = a + 1$.

Suponha que o número de divisores de m é $(a_1 + 1)\ldots(a_r + 1)$, se $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$.

Seja $n = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_r^{b_r} q_{r+1}^{b_{r+1}}$.

Agora, para cada fator de $q_1^{b_1} \ldots q_r^{b_r}$ temos b_{r+1} divisores novos de n.

Logo, temos $b_{r+1} \cdot F_r(q_1^{b_1}, \ldots, q_r^{b_r}) = b_{r+1} \cdot F_r$ divisores novos de n.

$\#$ {Divisores de n} $= F_r + F_r \cdot b_{r+1} = F_r \cdot (b_{r+1} + 1) = (b_1 + 1) \ldots (b_r + 1)(b_{r+1} + 1)$.

Outra curiosidade refere-se ao fato de nunca ter sido provado que existe um número perfeito ímpar. Os próximos itens mostram um breve estudo de números perfeitos, incluindo a fórmula de Euclides e a demonstração para os dígitos finais dos números perfeitos pares (que sempre terminam em 6 ou 28).

2.1.1 Quantidade de divisores de um número

Seja n um número natural (maior que 1) qualquer. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos representar esse número na forma

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r},$$

sendo $p_1, p_2, \ldots, p_r$ divisores primos de n.

Chamemos F_r o número de divisores de n. Então $F_r(n) = F_r = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_r + 1)$.

Vamos provar essa fórmula por indução em r, o número de divisores primos de n.

Supor $r = 1$. Então $n = p^a$.

$\Rightarrow$ {Divisores de n} $= \{p^0, p^1, \ldots, p^a\}$.

Então o número de divisores é $F_1 = a + 1$.

Suponha que o número de divisores de m é $(a_1 + 1) \ldots (a_r + 1)$, se $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$.

Seja $n = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \ldots q_r^{b_r} q_{r+1}^{b_{r+1}}$.

Agora, para cada fator de $q_1^{b_1} \ldots q_r^{b_r}$ temos b_{r+1} divisores novos de n.

Logo, temos $b_{r+1} \cdot F_r(q_1^{b_1}, \ldots, q_r^{b_r}) = b_{r+1} \cdot F_r$ divisores novos de n.

$\#$ {Divisores de n} $= F_r + F_r \cdot b_{r+1} = F_r \cdot (b_{r+1} + 1) = (b_1 + 1) \ldots (b_r + 1)(b_{r+1} + 1)$.

2.1.2 A soma dos divisores de um número

Seja $n = p^a q^b r^c s^d \ldots$, em que $p, q, r, s, \ldots$ são números primos diferentes de 1, e $a, b, c, d, \ldots$, números naturais.

Qual será a forma da soma de seus divisores? Vamos, a seguir, calcular essa soma.

Suponha f um fator de n. Então $f = p^x q^y r^z \ldots$

Sabemos que, para x variando de 0 a 'a', p^x será fator de f. Então, para $y = z = \ldots = 0$,

$x = 0 \Rightarrow f = 1$

$x = 1 \Rightarrow f = p$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3$

...

$x = a \Rightarrow f = p^a$.

Logo, $p, p^2, \ldots, p^a$ serão divisores de f, e a soma será

$1 + p + p^2 + \ldots + p^a$.

Agora, fazendo para $y = 1$,

$x = 0 \Rightarrow f = q$

$x = 1 \Rightarrow f = pq$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2 q$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3 q$

...

$x = a \Rightarrow f = p^a q$.

Logo, $q, pq, p^2q, \ldots, p^a q$ serão divisores de f, e a soma será

$q + pq + p^2q + \ldots + p^a q = q \cdot (1 + p + p^2 + \ldots + p^a)$.

2.1.2 A soma dos divisores de um número

Seja $n = p^a q^b r^c s^d \ldots$, em que $p, q, r, s, \ldots$ são números primos diferentes de 1, e $a, b, c, d, \ldots$, números naturais.

Qual será a forma da soma de seus divisores? Vamos, a seguir, calcular essa soma.

Suponha f um fator de n. Então $f = p^x q^y r^z \ldots$

Sabemos que, para x variando de 0 a 'a', p^x será fator de f. Então, para $y = z = \ldots = 0$,

$x = 0 \Rightarrow f = 1$

$x = 1 \Rightarrow f = p$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3$

...

$x = a \Rightarrow f = p^a$.

Logo, $p, p^2, \ldots, p^a$ serão divisores de f, e a soma será

$1 + p + p^2 + \ldots + p^a$.

Agora, fazendo para $y = 1$,

$x = 0 \Rightarrow f = q$

$x = 1 \Rightarrow f = pq$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2q$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3q$

...

$x = a \Rightarrow f = p^aq$.

Logo, $q, pq, p^2q, \ldots, p^aq$ serão divisores de f, e a soma será

$q + pq + p^2q + \ldots + p^aq = q \cdot (1 + p + p^2 + \ldots + p^a)$.

Agora vamos fazer $y = 2$,

$x = 0 \Rightarrow f = q^2$

$x = 1 \Rightarrow f = pq^2$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2q^2$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3q^2$

...

$x = a \Rightarrow f = p^aq^2$.

Logo, $q^2, p\,q^2, p^2q^2, ..., p^aq^2$ serão divisores de f, e a soma será

$q^2 + pq^2 + p^2q^2 + ... + p^aq^2 = q^2 \cdot (1 + p + p^2 + ... + p^a)$.

Continuando assim sucessivamente e variando y de 0 até b, teremos

$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)$.

Fazendo o mesmo processo com o fator primo r, com z variando de 0 até c, teremos

$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)\,(1 + r + r^2 + ... + r^c)$.

Assim, progressivamente, até chegarmos a

$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)\,(1 + r + r^2 + ... + r^c)\,...$

Portanto, esta será a soma dos divisores de n.

2.1.3 A fórmula de Euclides para um número perfeito par

Fórmula de Euclides: todo número perfeito par é um produto da forma $2^a \cdot (2^{a+1} - 1)$, se $(2^{a+1} - 1)$ for um número primo.

Demonstração

Tomemos como exemplo os seguintes números perfeitos:

Agora vamos fazer $y = 2$,

$x = 0 \Rightarrow f = q^2$

$x = 1 \Rightarrow f = pq^2$

$x = 2 \Rightarrow f = p^2q^2$

$x = 3 \Rightarrow f = p^3q^2$

...

$x = a \Rightarrow f = p^aq^2$.

Logo, $q^2, p\,q^2, p^2q^2, ..., p^aq^2$ serão divisores de f, e a soma será

$$q^2 + pq^2 + p^2q^2 + ... + p^aq^2 = q^2 \cdot (1 + p + p^2 + ... + p^a).$$

Continuando assim sucessivamente e variando y de 0 até b, teremos

$$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b).$$

Fazendo o mesmo processo com o fator primo r, com z variando de 0 até c, teremos

$$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)\,(1 + r + r^2 + ... + r^c).$$

Assim, progressivamente, até chegarmos a

$$(1 + p + p^2 + ... + p^a)\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)\,(1 + r + r^2 + ... + r^c) ...$$

Portanto, esta será a soma dos divisores de n.

2.1.3 A fórmula de Euclides para um número perfeito par

Fórmula de Euclides: todo número perfeito par é um produto da forma $2^a \cdot (2^{a+1} - 1)$, se $(2^{a+1} - 1)$ for um número primo.

Demonstração

Tomemos como exemplo os seguintes números perfeitos:

- $n = 6 = 2 \cdot 3$

Utilizando a equação anteriormente demonstrada, faremos $p = 2, a = 1; q = 3, b = 1$, então

$(1 + p)(1 + q) = 3 \cdot 4 = 12 = 2n$ (a fórmula inclui ele próprio como fator).

- $n = 28 = 2^2 \cdot 7$, então $p = 2, a = 2; q = 7, b = 1$, então

$(1 + p + p^2)(1 + q) = (1 + 2 + 4)(1 + 7) = 7 \cdot 8 = 56 = 2n.$

Supor que $n = p^a q^b r^c s^d \ldots$ com $p, q, r, \ldots$ primos e $a, b, c, \ldots$ expoentes naturais. Então temos a equação

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^a)(1 + q + q^2 + \ldots + q^b)(1 + r + r^2 + \ldots + r^c) \ldots = 2p^a q^b r^c s^d \ldots \quad (1)$$

Agora, se 2 for um dos divisores primos, isto é, $p = 2$, teremos

$1 + p + p^2 + \ldots + p^a = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^a$.

Mas $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^a = 2^{a+1} - 1$ é a soma da p.g. $1; 2; 4; 8; \ldots$

Assim, a equação (1) ficará da seguinte forma:

$$(2^{a+1} - 1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^b)(1 + r + r^2 + \ldots + r^c) \ldots = 2.2^a q^b r^c \ldots = 2^{a+1} q^b r^c \ldots$$

Isso mostra que $(2^{a+1} - 1)$ é um fator de $2^{a+1} q^b r^c \ldots$

Por outro lado, um fator primo de $(2^{a+1} - 1)$ será um dos números $2, q, r, \ldots$. Mas sabemos que 2 não é um fator de $2^{a+1} - 1$ (é um número ímpar). Além disso, assumindo que **a** não é zero, $2^{a+1} - 1$ será maior ou igual a 3.

Assim, $2^{a+1} - 1$ terá divisores maiores que 1 e será um dos primos q, r, etc. Vamos supor que seja q. Assim, para algum k,

$2^{a+1} - 1 = qk \Rightarrow 2^{a+1} = qk + 1.$

• $n = 6 = 2 \cdot 3$

Utilizando a equação anteriormente demonstrada, faremos $p = 2, a = 1; q = 3, b = 1$, então

$(1 + p)(1 + q) = 3 \cdot 4 = 12 = 2n$ (a fórmula inclui ele próprio como fator).

• $n = 28 = 2^2 \cdot 7$, então $p = 2, a = 2;\ q = 7, b = 1$, então

$(1 + p + p^2)(1 + q) = (1 + 2 + 4)\ (1 + 7) = 7 \cdot 8 = 56 = 2n$.

Supor que $n = p^a q^b r^c s^d \ldots$ com $p, q, r, \ldots$ primos e $a, b, c, \ldots$ expoentes naturais. Então temos a equação

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^a)\ (1 + q + q^2 + \ldots + q^b)\ (1 + r + r^2 + \ldots + r^c) \ldots = 2p^a q^b r^c s^d \ldots \quad (1)$$

Agora, se 2 for um dos divisores primos, isto é, $p = 2$, teremos

$1 + p + p^2 + \ldots + p^a = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^a$.

Mas $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^a = 2^{a+1} - 1$ é a soma da p.g. $1; 2; 4; 8; \ldots$

Assim, a equação (1) ficará da seguinte forma:

$$(2^{a+1} - 1)\ (1 + q + q^2 + \ldots + q^b)\ (1 + r + r^2 + \ldots + r^c) \ldots = 2.2^a q^b r^c \ldots = 2^{a+1} q^b r^c \ldots$$

Isso mostra que $(2^{a+1} - 1)$ é um fator de $2^{a+1} q^b r^c \ldots$

Por outro lado, um fator primo de $(2^{a+1} - 1)$ será um dos números $2, q, r, \ldots$. Mas sabemos que 2 não é um fator de $2^{a+1} - 1$ (é um número ímpar). Além disso, assumindo que **a** não é zero, $2^{a+1} - 1$ será maior ou igual a 3.

Assim, $2^{a+1} - 1$ terá divisores maiores que 1 e será um dos primos q, r, etc. Vamos supor que seja q. Assim, para algum k,

$2^{a+1} - 1 = qk \Rightarrow 2^{a+1} = qk + 1$.

Logo, a equação do número perfeito par será escrita da seguinte forma:

$qk\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^b)\,(1 + r + r^2 + \ldots + r^c)\ldots = (qk + 1)\,q^b r^c \ldots$

Dividindo os dois lados por $(qk \cdot q^b r^c \ldots)$, teremos

$$\frac{(1+q+q^2+\ldots+q^b)(1+r+r^2+\ldots+r^c)\ldots}{q^b r^c \ldots} = \frac{(qk+1)}{qk}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+q+q^2+\ldots+q^b)(1+r+r^2+\ldots+r^c)\ldots}{q^b r^c} = 1 + \frac{1}{qk}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^b}\right)\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^c}\right)\ldots = 1+\frac{1}{qk}\,.$$

Mas $1+\dfrac{1}{qk}$ é menor ou igual a $1+\dfrac{1}{q}$, visto que $\dfrac{1}{qk}$ é menor ou igual a $\dfrac{1}{q}$.

Por outro lado, $\left(1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}+\ldots+\dfrac{1}{q^b}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\ldots+\dfrac{1}{r^c}\right)\ldots$ é maior ou igual a $1+\dfrac{1}{q}$.

Então k e b só poderão ser iguais a 1 e os outros divisores $r, s, \ldots$ não existem.

Assim,

$(2^{a+1} - 1)\,(1 + q) = 2^{a+1}q$

$\Rightarrow\ 2^{a+1} + 2^{a+1}\,q - 1 - q = 2^{a+1}q$

$\Rightarrow\ 2^{a+1} - 1 - q = 0$

$\Rightarrow\ 2^{a+1} - 1 = q\,.$

Logo, $n = 2^a q = 2^a\,(2^{a+1} - 1)$.

Desse modo, demonstramos a fórmula de Euclides para números perfeitos pares. ■

Essa fórmula aparece no livro *Os Elementos*, de Euclides, onde se afirma que ela só é verdadeira se $(2^{a+1} - 1)$ for primo. Euclides não fez a demonstração que fizemos. Essa demonstração foi feita pela primeira vez por Euler.

Logo, a equação do número perfeito par será escrita da seguinte forma:

$$qk\,(1 + q + q^2 + ... + q^b)\,(1 + r + r^2 + ... + r^c)\, ... = (qk + 1)\, q^b r^c ...$$

Dividindo os dois lados por $(qk \cdot q^b r^c ...)$, teremos

$$\frac{(1+q+q^2+...+q^b)(1+r+r^2+...+r^c)...}{q^b r^c ...} = \frac{(qk+1)}{qk}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+q+q^2+...+q^b)(1+r+r^2+...+r^c)...}{q^b r^c} = 1+\frac{1}{qk}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+...+\frac{1}{q^b}\right)\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^c}\right)... = 1+\frac{1}{qk}.$$

Mas $1+\dfrac{1}{qk}$ é menor ou igual a $1+\dfrac{1}{q}$, visto que $\dfrac{1}{qk}$ é menor ou igual a $\dfrac{1}{q}$.

Por outro lado, $\left(1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}+...+\dfrac{1}{q^b}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^2}+...+\dfrac{1}{r^c}\right)...$ é maior ou igual a $1+\dfrac{1}{q}$.

Então k e b só poderão ser iguais a 1 e os outros divisores $r, s, ...$ não existem.

Assim,

$$(2^{a+1} - 1)\,(1 + q) = 2^{a+1}q$$

$$\Rightarrow\ 2^{a+1} + 2^{a+1}q - 1 - q = 2^{a+1}q$$

$$\Rightarrow\ 2^{a+1} - 1 - q = 0$$

$$\Rightarrow\ 2^{a+1} - 1 = q.$$

Logo, $n = 2^a q = 2^a\,(2^{a+1} - 1)$.

Desse modo, demonstramos a fórmula de Euclides para números perfeitos pares. ■

Essa fórmula aparece no livro *Os Elementos*, de Euclides, onde se afirma que ela só é verdadeira se $(2^{a+1} - 1)$ for primo. Euclides não fez a demonstração que fizemos. Essa demonstração foi feita pela primeira vez por Euler.

2.1.4 Os dígitos finais dos números perfeitos pares

Proposição

Dada a fórmula euclidiana $2^{n-1}(2^n - 1)$, a expressão binária do número perfeito par consiste em escrever *n uns* seguidos de *n-1 zeros*.

Prova

Na forma binária, 2^n é sempre 1 seguido de *n zeros*. Assim,

$2^1 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^1)_2 = 10$ (*1 zero*)

$2^2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^2)_2 = 100$ (*2 zeros*)

$2^3 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^3)_2 = 1000$ (*3 zeros*)

$2^4 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^4)_2 = 10000$ (*4 zeros*)

...

$2^n = 1 \times 2^n + 0 \times 2^{n-1} + 0 \times 2^{n-2} + ... + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^n)_2 = 100...00$ (*n zeros*).

Portanto, 2^{n-1} terá, como forma binária, 1 seguido de *n-1 zeros*.

Verifiquemos a expressão $2^n - 1$:

$2^1 - 1 = 1 \Rightarrow (2^1 - 1)_2 = 10 - 1 = 1$ (*1 um*)

$2^2 - 1 = 3 \Rightarrow (2^2 - 1)_2 = 100 - 1 = 11$ (*2 uns*)

$2^3 - 1 = 7 \Rightarrow (2^3 - 1)_2 = 1000 - 1 = 111$ (*3 uns*)

$2^4 - 1 = 15 \Rightarrow (2^4 - 1)_2 = 10000 - 1 = 1111$ (*4 uns*)

...

$(2^n - 1)_2 = 1000...00 - 1 = 1111...1$ (*n uns*).

Portanto, $2^n - 1$ terá, como forma binária, *n uns*.

Logo, $2^{n-1}(2^n - 1)$ será da forma $\overbrace{(1000...00)}^{n\text{ - }1\text{ zeros}} \times \overbrace{(111...11)}^{n\text{ uns}}$, e o produto estará na forma binária de *n uns* seguidos de *n – 1 zeros*.

Descrevemos então a forma binária de um número perfeito. ∎

2.1.4 Os dígitos finais dos números perfeitos pares

Proposição

Dada a fórmula euclidiana $2^{n-1}(2^n - 1)$, a expressão binária do número perfeito par consiste em escrever *n uns* seguidos de *n-1 zeros*.

Prova

Na forma binária, 2^n é sempre 1 seguido de *n zeros*. Assim,

$2^1 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^1)_2 = 10$ (*1 zero*)

$2^2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^2)_2 = 100$ (*2 zeros*)

$2^3 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^3)_2 = 1000$ (*3 zeros*)

$2^4 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^4)_2 = 10000$ (*4 zeros*)

...

$2^n = 1 \times 2^n + 0 \times 2^{n-1} + 0 \times 2^{n-2} + ... + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \Rightarrow (2^n)_2 = 100...00$ (*n zeros*).

Portanto, 2^{n-1} terá, como forma binária, 1 seguido de *n-1 zeros*.

Verifiquemos a expressão $2^n - 1$:

$2^1 - 1 = 1 \Rightarrow (2^1 - 1)_2 = 10 - 1 = 1$ (*1 um*)

$2^2 - 1 = 3 \Rightarrow (2^2 - 1)_2 = 100 - 1 = 11$ (*2 uns*)

$2^3 - 1 = 7 \Rightarrow (2^3 - 1)_2 = 1000 - 1 = 111$ (*3 uns*)

$2^4 - 1 = 15 \Rightarrow (2^4 - 1)_2 = 10000 - 1 = 1111$ (*4 uns*)

...

$(2^n - 1)_2 = 1000...00 - 1 = 1111...1$ (*n uns*).

Portanto, $2^n - 1$ terá, como forma binária, *n uns*.

Logo, $2^{n-1}(2^n - 1)$ será da forma $\overbrace{(1000...00)}^{n\text{ - }1\text{ zeros}} \times \overbrace{(111...11)}^{n\text{ uns}}$, e o produto estará na forma binária de *n uns* seguidos de *n – 1 zeros*.

Descrevemos então a forma binária de um número perfeito. ■

2.1.5 Regra simples para determinar o dígito final de um número perfeito par

Proposição

Se o 1º expoente (n – 1) for múltiplo de 4, o número perfeito par acaba em 6. Nos outros casos (exceto o 6) o número termina em 28. [2]

Prova

Veremos os seguintes casos:

a) $n - 1 = 4k$

b) $n - 1 = 4k + 1$

c) $n - 1 = 4k + 2$

d) $n - 1 = 4k + 3$

a) n – 1 = 4k

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos

$2^{n-1}(2^n - 1) \Rightarrow (2^4)^k\,(2^{4k+1} - 1) \Rightarrow (16^k)\,(2^{4k+1} - 1)$.

Sabemos que, para qualquer k, o último dígito de 16^k sempre será 6.

Verifiquemos a expressão $2^{4k+1} - 1$.

$2^{4k+1} = 16^k \times 2 \Rightarrow$ sempre terminará em 2. Logo, a expressão $2^{4k+1} - 1$ terminará sempre com o dígito 1.

Como o último dígito de 2^{4k} será sempre 6 e o último dígito de $(2^{4k+1} - 1)$ será sempre 1, então para a equação $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ o último dígito sempre será 6.

b) n – 1 = 4k + 1

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos $2^{4k+1}(2^{4k+2} - 1)$.

Mas $2^{4k+2} - 1$ não é um número primo para $k \geq 1$, pois

$2^{4k+2} - 1 = 2^{2(2k+1)} - 1 = (2^2)^{2k+1} - 1^{2k+1} = (2^2 - 1)(2^{4k} + 2^{4k-2} + 2^{4k-4} + \ldots) =$

$= 3 \cdot (2^{4k} + 2^{4k-2} + 2^{4k-4} + \ldots)$, ou seja, é múltiplo de 3.

2.1.5 Regra simples para determinar o dígito final de um número perfeito par

Proposição

Se o 1º expoente (n – 1) for múltiplo de 4, o número perfeito par acaba em 6. Nos outros casos (exceto o 6) o número termina em 28. [2]

Prova

Veremos os seguintes casos:

a) $n - 1 = 4k$

b) $n - 1 = 4k + 1$

c) $n - 1 = 4k + 2$

d) $n - 1 = 4k + 3$

a) n – 1 = 4k

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos

$2^{n-1}(2^n - 1) \Rightarrow (2^4)^k\,(2^{4k+1} - 1) \Rightarrow (16^k)\,(2^{4k+1} - 1)$.

Sabemos que, para qualquer k, o último dígito de 16^k sempre será 6.

Verifiquemos a expressão $2^{4k+1} - 1$.

$2^{4k+1} = 16^k \times 2 \Rightarrow$ sempre terminará em 2. Logo, a expressão $2^{4k+1} - 1$ terminará sempre com o dígito 1.

Como o último dígito de 2^{4k} será sempre 6 e o último dígito de $(2^{4k+1} - 1)$ será sempre 1, então para a equação $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ o último dígito sempre será 6.

b) n – 1 = 4k + 1

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos $2^{4k+1}(2^{4k+2} - 1)$.

Mas $2^{4k+2} - 1$ não é um número primo para $k \geq 1$, pois

$2^{4k+2} - 1 = 2^{2(2k+1)} - 1 = (2^2)^{2k+1} - 1^{2k+1} = (2^2 - 1)(2^{4k} + 2^{4k-2} + 2^{4k-4} + \ldots) =$

$= 3\cdot(2^{4k} + 2^{4k-2} + 2^{4k-4} + \ldots)$, ou seja, é múltiplo de 3.

c) n – 1 = 4k + 2

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos

$2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1) = 2^{4k} \times 2^2(2^{4k} \times 2^3 - 1) = 16^k \times 4(16^k \times 8 - 1)$.

A seqüência dos dois últimos dígitos para $16^k \times 4$ será: {64, 24, 84, 44, 04, 64, ...} e seguirá sempre nesta ordem.

Para $(16^k \times 8 - 1)$, a seqüência dos dois últimos dígitos ficará assim:

{27, 47, 67, 87, 07, 27, ...}, seguindo assim sucessivamente.

Assim, os dois últimos dígitos de $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ virão da multiplicação dessas duas últimas seqüências

64 x 27 = 17**28**
24 x 47 = 11**28**
84 x 67 = 56**28**
44 x 87 = 38**28**
04 x 07 = **28**
64 x 27 = 17**28**
...

Logo, o número perfeito par $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ terminará sempre em 28.

d) n – 1 = 4k + 3

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos $2^{4k+3}(2^{4k+4} - 1)$.

Mas $2^{4k+4} - 1$ não é um número primo para $k \geq 0$, pois

$(2^4)^{k+1} - 1^{k+1} = (2^4 - 1)(2^{4k} + 2^{4k-4} + 2^{4k-8} + ...) =$

$= 15 \cdot (2^{4k} + 2^{4k-4} + 2^{4k-8} + ...)$, ou seja, é múltiplo de 5.

Logo, provamos que todo número perfeito par ou terminará em 6 ou em 28. ■

c) n – 1 = 4k + 2

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos

$2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1) = 2^{4k} \times 2^2(2^{4k} \times 2^3 - 1) = 16^k \times 4(16^k \times 8 - 1)$.

A seqüência dos dois últimos dígitos para $16^k \times 4$ será: {64, 24, 84, 44, 04, 64, ...} e seguirá sempre nesta ordem.

Para $(16^k \times 8 - 1)$, a seqüência dos dois últimos dígitos ficará assim:

{27, 47, 67, 87, 07, 27, ...}, seguindo assim sucessivamente.

Assim, os dois últimos dígitos de $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ virão da multiplicação dessas duas últimas seqüências

64 x 27 = 17**28**
24 x 47 = 11**28**
84 x 67 = 56**28**
44 x 87 = 38**28**
04 x 07 = **28**
64 x 27 = 17**28**
...

Logo, o número perfeito par $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ terminará sempre em 28.

d) n – 1 = 4k + 3

Utilizando a fórmula de Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, teremos $2^{4k+3}(2^{4k+4} - 1)$.

Mas $2^{4k+4} - 1$ não é um número primo para $k \geq 0$, pois

$(2^4)^{k+1} - 1^{k+1} = (2^4 - 1)(2^{4k} + 2^{4k-4} + 2^{4k-8} + ...) =$

$= 15 \cdot (2^{4k} + 2^{4k-4} + 2^{4k-8} + ...)$, ou seja, é múltiplo de 5.

Logo, provamos que todo número perfeito par ou terminará em 6 ou em 28. ■

2.1.6 A soma dos inversos dos divisores de um número perfeito par

Um fato curioso é que a soma dos inversos de todos os divisores de um número perfeito par (incluindo ele próprio) é igual a 2.

Vejamos para o número 6:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

E para o número 28:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{28+14+7+4+2+1}{28}=\frac{2\cdot 28}{28}=2.$$

Se n é um número perfeito par e $d_1,d_2,\ldots,d_r$ são todos os seus divisores, teremos a expressão

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{n+\ldots+d_3+d_2+d_1+1}{n}.$$

Mas $1+d_1+d_2+d_3+\ldots=n$, então a soma será

$$\frac{n+n}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$

A recíproca é, obviamente, válida. Ou seja, se a soma dos inversos dos divisores de um número é 2 então ele é perfeito.

2.1.7 Números perfeitos pares são triangulares

Outra propriedade dos números perfeitos pares é a sua triangulação, isto é, um número perfeito par pode ser agrupado na forma de triângulo eqüilátero, como mostra a figura 18.

Figura 18 – Números triangulares

Um número triangular é a soma de números consecutivos, ou seja,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=T_n.$$

2.1.6 A soma dos inversos dos divisores de um número perfeito par

Um fato curioso é que a soma dos inversos de todos os divisores de um número perfeito par (incluindo ele próprio) é igual a 2.

Vejamos para o número 6:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

E para o número 28:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{28+14+7+4+2+1}{28}=\frac{2\cdot 28}{28}=2.$$

Se n é um número perfeito par e $d_1,d_2,\ldots,d_r$ são todos os seus divisores, teremos a expressão

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{n+\ldots+d_3+d_2+d_1+1}{n}.$$

Mas $1+d_1+d_2+d_3+\ldots=n$, então a soma será

$$\frac{n+n}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$

A recíproca é, obviamente, válida. Ou seja, se a soma dos inversos dos divisores de um número é 2 então ele é perfeito.

2.1.7 Números perfeitos pares são triangulares

Outra propriedade dos números perfeitos pares é a sua triangulação, isto é, um número perfeito par pode ser agrupado na forma de triângulo eqüilátero, como mostra a figura 18.

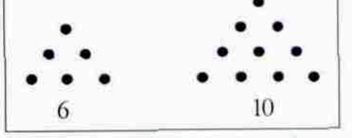

Figura 18 – Números triangulares

Um número triangular é a soma de números consecutivos, ou seja,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=T_n.$$

Suponha P um número perfeito par. Então, pela fórmula de Euclides,

$$P = 2^{m-1}(2^m - 1) = \frac{(2^m - 1)2^m}{2}.$$

Então, fazendo $2^m - 1 = n$, teremos $2^m = n + 1$. Substituindo, teremos

$$P = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.1.8 A raiz digital do número perfeito par

A raiz digital de um número inteiro não negativo é o resto da sua divisão por 9. Um modo prático de calcular a raiz digital de um número é fazendo a soma de seus algarismos; se essa soma resultar em um número maior que 9, fazemos novamente a soma de seus algarismos e, assim, sucessivamente, até resultar em um único algarismo: se for 9, a raiz é zero; se for entre 0 e 9, essa será a raiz digital do número (por exemplo, 556; $5 + 5 + 6 = 16$; $1 + 6 = 7$).

Uma das propriedades mais interessantes dos números perfeitos pares é que a raiz digital de qualquer número perfeito par sempre será 1.

Prova

Suponhamos p primo ímpar, diferente de 2.

Sabemos que $2 \equiv -1 (\mathrm{mod} 3)$.

Uma propriedade de congruência é que se $a \equiv b (\mathrm{mod} n)$ então $a^r \equiv b^r (\mathrm{mod} n)$.

Logo, $2^{p-1} \equiv (-1)^{p-1} (\mathrm{mod} 3)$. Mas $p - 1$ é par se $p \neq 2$, e, assim,

$2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$, isto é, $2^{p-1} = 3k + 1$, para algum k inteiro.

Multiplicando por 2, teremos $2^p = 6k + 2$, ou seja, $2^p - 1 = 6k + 1$.

Logo, $2^{p-1}(2^p - 1) = (3k + 1)(6k + 1) = 18k^2 + 9k + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod} 9)$.

Portanto, a raiz digital de um número perfeito par (diferente de 6) é 1.

Obs.: 6 falha pois, ao usarmos a fórmula $2^{p-1}(2^p - 1)$, teremos $p = 2$. ■

Suponha P um número perfeito par. Então, pela fórmula de Euclides,

$$P = 2^{m-1}(2^m - 1) = \frac{(2^m - 1)2^m}{2}.$$

Então, fazendo $2^m - 1 = n$, teremos $2^m = n + 1$. Substituindo, teremos

$$P = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.1.8 A raiz digital do número perfeito par

A raiz digital de um número inteiro não negativo é o resto da sua divisão por 9. Um modo prático de calcular a raiz digital de um número é fazendo a soma de seus algarismos; se essa soma resultar em um número maior que 9, fazemos novamente a soma de seus algarismos e, assim, sucessivamente, até resultar em um único algarismo: se for 9, a raiz é zero; se for entre 0 e 9, essa será a raiz digital do número (por exemplo, 556; $5 + 5 + 6 = 16$; $1 + 6 = 7$).

Uma das propriedades mais interessantes dos números perfeitos pares é que a raiz digital de qualquer número perfeito par sempre será 1.

Prova

Suponhamos p primo ímpar, diferente de 2.

Sabemos que $2 \equiv -1(\text{mod}3)$.

Uma propriedade de congruência é que se $a \equiv b(\text{mod}n)$ então $a^r \equiv b^r(\text{mod}n)$.

Logo, $2^{p-1} \equiv (-1)^{p-1}(\text{mod}3)$. Mas $p - 1$ é par se $p \neq 2$, e, assim,

$2^{p-1} \equiv 1(\text{mod}3)$, isto é, $2^{p-1} = 3k + 1$, para algum k inteiro.

Multiplicando por 2, teremos $2^p = 6k + 2$, ou seja, $2^p - 1 = 6k + 1$.

Logo, $2^{p-1}(2^p - 1) = (3k + 1)(6k + 1) = 18k^2 + 9k + 1 \equiv 1(\text{mod}9)$.

Portanto, a raiz digital de um número perfeito par (diferente de 6) é 1.

Obs.: 6 falha pois, ao usarmos a fórmula $2^{p-1}(2^p - 1)$, teremos $p = 2$. ■

2.2 Os primos de Mersenne

O frade franciscano Marin Mersenne (1588-1648), matemático francês, foi pioneiro na tentativa de descobrir uma fórmula que gerasse números primos. Propôs a fórmula $2^p - 1$, onde p é primo. Os números primos gerados por essa fórmula são chamados de números primos de Mersenne (denotado por M_p).

Proposição

Se $2^p - 1$ é primo, então p é primo.

Prova

Vamos demonstrar a contra-positiva da afirmação.

Suponha $p \geq 2$, $p = ab$, ambos $a,b \neq 1$. Então

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \ldots + 2^a + 1).$$

Logo, $2^p - 1$ é composto. ■

Assim como acontece com os números perfeitos, não existe prova de que existem infinitos primos de Mersenne.

Este conceito está diretamente relacionado ao conceito de número perfeito, pois cada primo de Mersenne leva imediatamente a um número perfeito.

Hoje, graças à computação, já são conhecidos 39 primos de Mersenne.

2.2 Os primos de Mersenne

O frade franciscano Marin Mersenne (1588-1648), matemático francês, foi pioneiro na tentativa de descobrir uma fórmula que gerasse números primos. Propôs a fórmula $2^p - 1$, onde p é primo. Os números primos gerados por essa fórmula são chamados de números primos de Mersenne (denotado por M_p).

Proposição

Se $2^p - 1$ é primo, então p é primo.

Prova

Vamos demonstrar a contra-positiva da afirmação.

Suponha $p \geq 2$, $p = ab$, ambos $a,b \neq 1$. Então

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \ldots + 2^a + 1).$$

Logo, $2^p - 1$ é composto. ■

Assim como acontece com os números perfeitos, não existe prova de que existem infinitos primos de Mersenne.

Este conceito está diretamente relacionado ao conceito de número perfeito, pois cada primo de Mersenne leva imediatamente a um número perfeito.

Hoje, graças à computação, já são conhecidos 39 primos de Mersenne.

2.3 Os números amigáveis

Os números amigáveis são uma generalização dos números perfeitos. Eles são pares de números tais que a soma dos divisores de um é igual ao outro e vice-versa. Vejamos o seguinte exemplo:

Soma dos divisores próprios de 220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

Soma dos divisores próprios de 284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

Estudiosos da Bíblia localizaram o número 220 no Genesis 32:14 como o número de cabras que Jacob deu a Esaú. Uma escolha inteligente, disseram os estudiosos, porque, sendo 220 um dos pares amigáveis, exprimia o afeto que Jacob sentia por Esaú. [2]

São conhecidos mais de 1000 pares de números amigáveis, na figura 19 apresento alguns deles.

220	284
1.184	1.210
2.620	2.924
5.020	5.564
6.232	6.368
10.744	10.856
12.285	14.595
17.296	18.416
63.020	76.084
66.928	66.992
67.095	71.145
69.615	87.633
79.750	88.730

Figura 19 – Números amigáveis [2]

Vários desses pares foram encontrados em 1972 por H. J. J. te Riele, de Amsterdã, e o maior deles é formado por 152 dígitos.

Existe uma fórmula para gerar números amigáveis, semelhante à fórmula de Euclides para gerar números perfeitos, mas desconhece-se também se a quantidade desses pares é infinita.

2.3 Os números amigáveis

Os números amigáveis são uma generalização dos números perfeitos. Eles são pares de números tais que a soma dos divisores de um é igual ao outro e vice-versa. Vejamos o seguinte exemplo:

Soma dos divisores próprios de 220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

Soma dos divisores próprios de 284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

Estudiosos da Bíblia localizaram o número 220 no Genesis 32:14 como o número de cabras que Jacob deu a Esaú. Uma escolha inteligente, disseram os estudiosos, porque, sendo 220 um dos pares amigáveis, exprimia o afeto que Jacob sentia por Esaú. [2]

São conhecidos mais de 1000 pares de números amigáveis, na figura 19 apresento alguns deles.

220	284
1.184	1.210
2.620	2.924
5.020	5.564
6.232	6.368
10.744	10.856
12.285	14.595
17.296	18.416
63.020	76.084
66.928	66.992
67.095	71.145
69.615	87.633
79.750	88.730

Figura 19 – Números amigáveis [2]

Vários desses pares foram encontrados em 1972 por H. J. J. te Riele, de Amsterdã, e o maior deles é formado por 152 dígitos.

Existe uma fórmula para gerar números amigáveis, semelhante à fórmula de Euclides para gerar números perfeitos, mas desconhece-se também se a quantidade desses pares é infinita.

Conclusão

O estudo desses números, ricos em conceitos e aplicações, pode ser utilizado como contexto em sala de aula, muito útil no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, sendo esse meu maior objetivo.

É interessante notar que há ainda problemas em aberto, cujos enunciados são simples: existem infinitos números primos de Mersenne? Existe um número perfeito ímpar? A fórmula de Euclides estabeleceu que o problema de existência de infinitos números primos de Mersenne é equivalente à existência de infinitos números perfeitos pares.

Durante todo o curso de graduação, poucas foram as oportunidades de estudar a história da matemática. Neste trabalho, apesar de restrito, tive a oportunidade de conhecer um pouco mais da história e de curiosidades que não passaram despercebidas.

Mesmo com toda tensão interior pela qual passamos durante a graduação, adquirimos um ritmo no raciocínio que não se forma somente através dos estudos, mas também através dessa paixão que temos pela matemática, onde necessitamos descobrir tudo aquilo que nos intriga e que nos chama a atenção.

Conclusão

O estudo desses números, ricos em conceitos e aplicações, pode ser utilizado como contexto em sala de aula, muito útil no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, sendo esse meu maior objetivo.

É interessante notar que há ainda problemas em aberto, cujos enunciados são simples: existem infinitos números primos de Mersenne? Existe um número perfeito ímpar? A fórmula de Euclides estabeleceu que o problema de existência de infinitos números primos de Mersenne é equivalente à existência de infinitos números perfeitos pares.

Durante todo o curso de graduação, poucas foram as oportunidades de estudar a história da matemática. Neste trabalho, apesar de restrito, tive a oportunidade de conhecer um pouco mais da história e de curiosidades que não passaram despercebidas.

Mesmo com toda tensão interior pela qual passamos durante a graduação, adquirimos um ritmo no raciocínio que não se forma somente através dos estudos, mas também através dessa paixão que temos pela matemática, onde necessitamos descobrir tudo aquilo que nos intriga e que nos chama a atenção.

Referências bibliográficas

[1] EVES, Howard. *Geometria*. v.3. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, c1994. (Coleção Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.)

[2] GARDNER, Martin. *O festival mágico da matemática*. Portugal: Gradiva, 1994. (Coleção O prazer da matemática.)

[3] GUNDLACH, Bernard H. *Números e numerais*. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992. (Coleção Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.)

[4] HUNTLEY, H. E. *A divina proporção*: um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

[5] GARSCHAGEM, M. Donaldson (Ed.). *Nova enciclopédia Barsa*. Direção geral de Jesus S. F. Amaral. Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM único. Produzida por Encyclopædia Britannica do Brasil Publicações Ltda.

[6] OGILVY, C. S.; ANDERSON, J. T. *Excursions in number theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1988.

[7] PENNICK, Nigel. Geometria Sagrada. 6.ed. São Paulo: Pensamento, 2002.

Internet

www.edu.fc.ul.pt

www.expoente.com.br/professores/kalinke/Home%20page/Razão%20áurea.htm

www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm

www.geocities.com/templosalomao/pi.htm

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm

www.tribunadonorte.com.br/anteriores/020511/viver/polifonicas.html

Referências bibliográficas

[1] EVES, Howard. *Geometria*. v.3. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, c1994. (Coleção Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.)

[2] GARDNER, Martin. *O festival mágico da matemática*. Portugal: Gradiva, 1994. (Coleção O prazer da matemática.)

[3] GUNDLACH, Bernard H. *Números e numerais*. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992. (Coleção Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.)

[4] HUNTLEY, H. E. *A divina proporção*: um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

[5] GARSCHAGEM, M. Donaldson (Ed.). *Nova enciclopédia Barsa*. Direção geral de Jesus S. F. Amaral. Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM único. Produzida por Encyclopædia Britannica do Brasil Publicações Ltda.

[6] OGILVY, C. S.; ANDERSON, J. T. *Excursions in number theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1988.

[7] PENNICK, Nigel. Geometria Sagrada. 6.ed. São Paulo: Pensamento, 2002.

Internet

www.edu.fc.ul.pt

www.expoente.com.br/professores/kalinke/Home%20page/Razão%20áurea.htm

www.mat.uel.br/geometrica/4tarq.htm

www.geocities.com/templosalomao/pi.htm

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica.htm

www.tribunadonorte.com.br/anteriores/020511/viver/polifonicas.html